UNIUNEA EUROPEANĂ GUVERNUL ROMÂNIEI Fondul Social European POSDRU 2007-2013 Instrumente Structurale 2007-2013 MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE OIPOSDRU Inspectoratul Școlar Județean Suceava
FONDUL SOCIAL EUROPEAN Investește în OAMENI

Proiect cofinanţat din Fondul Social European prin Programul Operaţional Sectorial Dezvoltarea Resurselor Umane 2007-2013
Axa prioritară 1 „Educaţia şi formarea profesională în sprijinul creşterii economice şi dezvoltării societăţii bazate pe cunoaştere"
Domeniul major de intervenţie 1.1 „Acces la educaţie şi formare profesională iniţială de calitate"
Titlul proiectului: „TEEN PERFORM - Program inovator de îmbunătăţire a rezultatelor şcolare în învăţământul liceal"
Contract număr: POSDRU/153/1.1/S/136612
Beneficiar: Inspectoratul Şcolar Judeţean Suceava

Disciplina MATEMATICĂ
FIŞĂ DE LUCRU

Tema/Unitatea: *Derivata unei funcții. Rolul derivatelor de ordinul I și de ordinul al II-lea în studiul funcțiilor*

Expert educație: prof. Ursaciuc Mihaela, Colegiul "Alexandru cel Bun", Gura Humorului, Suceava

Breviar teoretic

I. Funcţii derivabile

Definiţie: Fie f:D$\to R$,x$_0 \in D$ punct de acumulare pentru D. Derivata într-un punct:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

f este derivabilă în x_0 dacă limita precedentă există şi este finită.

- Dacă f este derivabilă în x_0, graficul funcţiei are în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ tangentă a cărei pantă este $f'(x_0)$.

Ecuaţia tangentei este: $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

Teoremă: Fie f:D$\to$R **,** $x_0 \in D$ punct de acumulare pentru D$\Rightarrow$f este derivabilă în punctul de acumulare $x_0 \Leftrightarrow f_s'(x_0)=f_d'(x_0)\in$ R(finite) $\Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\langle x_0}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=.\ \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\rangle x_0}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\in R$.

Teoremă . Orice funcţie derivabilă într-un punct este continuă în acel punct.

INSPECTORATUL SCOLAR JUDEȚEAN DÂMBOVIȚA
Federația Națională a Asociațiilor de Părinți - Învățământ Preuniversitar

	Derivatele funcţiilor elementare			Operaţii cu funcţii derivabile Reguli de derivare
1	$c^{'}=0$	**11**	$(\log_a x)^{'}=\frac{1}{x\ln a}$	**Teoremă:**Fie f,g:D$\to R$ derivabile pe D$\Rightarrow$f+g ,fg, $\frac{f}{g}$(g$\neq 0$)sunt funcţii derivabile pe D. Compunerea a două funcţii derivabile este o funcţie derivabilă.
2	$x'=1$	**12**	$(\mathrm{arctg}\,x)^{'}=\frac{1}{x^2+1}$	$(f\pm g)^{'}=f^{'}\pm g^{'}$
3	$\left(x^n\right)^{'}=\mathrm{n}x^{n-1}$	**13**	$(\mathrm{arcctg}\,x)^{'}=-\frac{1}{x^2+1}$	$(f\cdot g)^{'}=f^{'}\cdot g+f\cdot g^{'}$
4	$\left(\sqrt{x}\right)^{'}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	**14**	$(\arcsin x)^{'}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\lambda\cdot f)^{'}=\lambda\cdot f^{'}$
5	$\left(\frac{1}{x}\right)^{'}=-\frac{1}{x^2}$	**15**	$(\arccos x)^{'}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\left(\frac{f}{g}\right)^{'}=\frac{f^{'}\cdot g-f\cdot g^{'}}{g^2}$
6	$\left(e^x\right)^{'}=e^x$	**16**	$(\sin x)^{'}=\cos x$	$(f\circ u)^{'}=f^{'}(u)\cdot u^{'}$
7	$\left(a^x\right)^{'}=a^x\ln a$	**17**	$(\cos x)^{'}=-\sin x$	
8	$(\ln x)^{'}=\frac{1}{x}$	**18**	$(\mathrm{tg}\,x)^{'}=\frac{1}{\cos^2 x}$	
9	$(\mathrm{ctg}\,x)^{'}=-\frac{1}{\sin^2 x}$	**19**	$\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^{'}=\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$	
10	$\left(\sqrt{x^2+a^2}\right)^{'}=\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$	**20**	$\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^{'}=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$	

II. Proprietăţile funcţiilor derivabile

Definiţie:Fie f:D$\to$R.Un punct $x_0\in D$ se numeşte punct de maxim local(respectiv de minim local)al lui f dacă există o vecinătate U a punctului x_0 astfel încât f(x)$\leq$f(x_0)(respectiv f(x)$\geq$f(x_0)) pentru orice x$\in D\cap U$.

Dacă f(x)$\leq$f(x_0)(respectiv f(x)$\geq$f(x_0)) pentru orice x$\in D$ atunci x_0 se numeşte punct de maxim absolut(respectiv minim absolut)

Teoremă . (Fermat) Fie I un interval deschis şi $x_0 \in$ I un punct de extrem al unei funcţii f: I→R. Dacă f este derivabilă în punctul x_0 atunci $f'(x_0)=0$.

Definiţie:O funcţie f: [a, b] →R (a< b) se numeşte funcţie Rolle dacă este continuă pe intervalul compact [a, b] şi derivabilă pe intervalul deschis (a, b).

Teorema lui Rolle

Fie f: [a, b]→ R, a< b o funcţie Rolle astfel încât f(a)= f(b), atunci există cel puţin un punct c∈ (a, b) astfel încât $f'(c)=0$.

Teorema(teorema lui J. Lagrange). Fie f o funcţie Rolle pe un interval compact [a, b]. Atunci ∃ c∈ (a, b) astfel încât $f(b)- f(a)= (b- a)f'(c)$

Consecinţe:

- Dacă o funcţie derivabilă are derivata nulă pe un interval atunci ea este constantă pe acel interval.
- Dacă două funcţii derivabile au derivatele egale pe un interval atunci ele diferă printr-o constantă pe acel interval.

III. Rolul primei derivate

- Fie *f* o funcţie derivabilă pe un interval I.

Dacă $f'(x) > 0 (f'(x) \geq 0), \forall x \in \mathrm{I}$, atunci *f* este strict crescătoare(crescătoare) pe I.

Dacă $f'(x) < 0 (f'(x) \leq 0), \forall x \in \mathrm{I}$, atunci *f* este strict descrescătoare(descrescătoare) pe I.

- Fie f:D$\to R$,D interval şi $x_0 \in D$.Dacă :

1)f este continuă în x_0 2)f este derivabilă pe D-$\{x_0\}$ 3)există $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = l \in \overline{R}$ atunci f are derivată în x_0 şi $f'(x_0) = l$.Dacă $l \in R$ atunci f este derivabilă în x_0.

Observaţie: Cu ajutorul primei derivate se stabilesc intervalele de monotonie ale unei funcţii derivabile şi se determină punctele de extrem local.

IV. Rolul derivatei a doua

T**eoremă**: Fie *f* o funcţie de două ori derivabilă pe I.

Dacă $f''(x) \geq 0, \forall x \in \mathrm{I}$, atunci *f* este convexă pe I.

Dacă $f''(x) \leq 0, \forall x \in \mathrm{I}$, atunci *f* este concavă pe I.

Definiţie: Fie *f* o funcţie continuă pe I si $x_0 \in \mathbf{I}$ punct interior intervalului. Spunem că x_0 este punct de inflexiune al graficului funcţiei dacă *f* este convexă pe o vecinătate stânga a lui x_0 şi concavă pe o vecinătate dreapta a lui x_0 sau invers.

Observaţie:Cu ajutorul derivatei a doua se stabilesc intervalele de convexitate şi concavitate şi se determină punctele de inflexiune.

Exemple de itemi de tip examen de bacalaureat

1. Se consideră funcţia $f: R\setminus\{-1\} \to R,\ f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$.

a) Să se calculeze derivata funcţiei *f*.
b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcţiei *f*.
c) Să se demonstreze că $f(x) \le -4$ pentru $\forall x < -1$.

2. Se consideră funcţia $f: R \to R,\ f(x)=e^x - e^{-x}$.

a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$.
b) Să se arate că funcţia *f* este crescătoare pe *R*.
c) Să se calculeze $S=g(0)+g(1)+...+g(2012)$, unde $g: R\to R,\ g(x)=f'(x)-f''(x)$ şi f'' reprezintă derivata a doua a funcţiei *f*.

3. Se consideră funcţia $f: R \to R,\ f(x)=x+e^{-x}$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in R$.
b) Să se arate că *f* este descrescătoare pe $(-\infty;0]$ şi crescătoare pe $[0;+\infty)$.
c) Să se determine ecuaţia asimptotei oblice către $+\infty$ la graficul funcţiei *f*.

4. Se consideră funcţia $f: R\to R,\ f(x)=x^{2012}-2012(x-1)-1$.

a) Să se calculeze $f(0)+f'(0)$.
b) Să scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=1$.
c) Să se arate că *f* este convexă pe *R*.

5. Se consideră funcţia $f: R\to R,\ f(x)=e^x+x^2$.

a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.
b) Să se demonstreze că funcţia f nu are asimptotă către $+\infty$.
c) Să se demonstreze că funcţia f este convexă pe R.

6. Se consideră funcţia $f:(0;+\infty)\to R$ definită prin $f(x)=x-2\ln x$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in(0;+\infty)$
b) Să se demonstreze că funcţia f este convexă pe intervalul $(0;+\infty)$.
c) Să se demonstreze că $f(x)\ge \ln\dfrac{e^2}{4},\ \forall x\in(0;+\infty)$

7. Se consideră funcţia $f: R\setminus\{-1\}\to R$ definită prin $f(x)=\dfrac{e^x}{x+1}$.

a) Să se verifice că $f'(x)=\dfrac{xe^x}{(x+1)^2}, \forall x\in R\setminus\{-1\}$.

b) Să se determine ecuaţia asimptotei către $-\infty$ la graficul funcţiei f.
c) Să se demonstreze că $f(x) \geq 1$, pentru $\forall x > -1$.

8. Se consideră funcţia $f:(0;+\infty) \to R$ definită prin $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

a) Să se calculeze $f'(e)$.
b) Să se determine ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ a graficului f.
c) Să se demonstreze că $x^e \leq e^x$ pentru $\forall x > 0$.

9. Se consideră funcţiile $f_n : R \to R$ date prin $f_0(x) = e^{-x} - 1$ şi $f_{n+1}(x) = f_n^{'}(x)$ pentru $\forall n \in N$.

a) Să se calculeze $f_1(x),\ x \in R$.
b) Să se determine ecuaţia asimptotei orizontale către $+\infty$ a graficului funcţiei f_0.
c) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f_2(x) + x - 1}{x^2}$.

10. Se consideră funcţia $f : R^* \to R$ definită prin $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$.

a) Să se calculeze $f'(x), x \in R$.
b) Să se demonstreze că funcţia f este descrescătoare pe $(0;2]$.
c) Să se arate că $2e^{\sqrt{3}} \leq 3e^{\sqrt{2}}$.

11. Se consideră funcţia $f : R \setminus \{1\} \to R$ definită prin $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 2}{x - 1}$

a) Să se calculeze $f'(x), x \in R \setminus \{1\}$.
b) Să se demonstreze că funcţia f admite două puncte de extrem.
c) Să se determine ecuaţia asimptotei oblice către $+\infty$ la graficul funcţiei f.

12. Se consideră funcţia $f : R \to R$, $f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^x$.

a) Să se calculeze $f'(x), x \in R$.
b) Să se determine numărul punctelor de extrem ale funcţiei f.
c) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\dfrac{f'(x)}{f(x)} - 1\right)$.

13. Se consideră funcţia $f : R \to R$, $f(x) = e^x - x$.

a) Să se calculeze $f'(x), x \in R$.
b) Să se demonstreze că $f(x) \geq 1$ pentru $\forall x \in R$.
c) Să se scrie ecuaţia asimptotei oblice către $-\infty$ la graficul funcţiei f.

14. Se consideră funcţia $f : R \to R$, $f(x) = x^2 + e^x$.

a) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$.
b) Să se arate că funcţia f este convexă pe R.
c) Să se rezolve în R ecuaţia $f'(x) - f''(x) + f(x) = e^x - 3$.

15. Se consideră funcţia $f:(0;+\infty)\to R\ f(x)=x^2\ln x$.

a) Să se arate că $f'(x)=x(2\ln x+1),\ \forall x\in(0;+\infty)$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{x\ln x}$.

c) Să se demonstreze că $f(x)\geq -\dfrac{1}{2e}$, pentru $\forall x>0$.

16. Se consideră funcţia $f:R\to R,\ f(x)=x-\dfrac{1}{e^x}$.

a) Să se calculeze $f(0)+f'(0)$.

b) Să se arate că funcţia f este concavă pe R.

c) Să se demonstreze că panta tangentei în orice punct graficul funcţiei f este mai mare decât 1.

17. Se consideră funcţia $f:R\to R\ f(x)=(x^2+2x+3)e^x$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in R$.

b) Să se determine $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$.

c) Să se demonstreze că funcţia f' este crescătoare pe R.

18. Se consideră funcţia $f:R\to R,\ f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in R$.

b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcţiei f.

c) Ştiind că $g:R^*\to R$ este funcţia definită prin $g(x)=f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, să se determine $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)+g(x^2)+g(x^3)+\ldots+g(x^{2011})+x^{2012}}{x^{2011}}$.

19. Se consideră funcţia $f:(1;+\infty)\to R,\ f(x)=\dfrac{2x-1}{x-1}$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in(1;+\infty)$.

b) Să se verifice că $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=-1$.

c) Să se arate că funcţia f este descrescătoare pe intervalul $(1;+\infty)$.

20. Se consideră funcţia $f:R\to R,\ f(x)=x^2+e^x$.

a) Să se verifice că $f'(0)=1$.

b) Să se arate că funcţia f este convexă pe R.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{e^x}$.

21. Se consideră funcţiile $f,g:R\to R,\ f(x)=(x-1)e^x$ şi $g(x)=xe^x$.

a) Să se verifice că $f'(x)=g(x)$ pentru $\forall x\in R$.

b) Să se determine ecuaţia asimptotei către $-\infty$ la graficul funcţiei *g*.

c) Dacă $I \subset R$ este un interval, să se demonstreze că funcţia g este crescătoare pe I dacă şi numai dacă funcţia *f* este convexă pe *I*.

22. Se consideră funcţia $f:(0;+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=(x-2)\ln x.$

a) Să se calculeze $f'(x), x\in(0;+\infty)$.

b) Să se determine $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

c) Să se arate că f' este crescătoare pe $(0;+\infty)$.

23. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}1+\sqrt{x}, x\ge 0\\ e^x, x<0\end{cases}$.

a) Să se studieze continuitatea funcţiei *f* în punctul $x_0=0$.

b) Să se determine ecuaţia asimptotei către $-\infty$ la graficul funcţiei *f*.

c) Să se demonstreze că funcţia f este concavă pe intervalul $(0;+\infty)$.

24. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}ax-6, x<4\\ \sqrt{x}, x\ge 4\end{cases}$, unde *a* este parametru real.

a) Să se determine valoarea reală a lui *a*, astfel încât funcţia *f* să fie continuă în punctul $x_0=4$.

b) Să se calculeze $f'(9)$.

c) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei *f* în punctul $A(9;3)$.

25. a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-2x-1}{3x^2-4x+1}$.

b) Să se determine intervalele de convexitate şi de concavitate ale funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-6x^2+18x+12$.

c) Să se determine semnul funcţiei $g:(0;+\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=(x^2-1)\ln x.$

a)

26. Se consideră funcţia $f:(0;+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{e^x}{x}.$

a) Să se verifice că $f'(x)=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$, pentru $\forall x>0.$

b) Să se determine asimptota verticală la graficul funcţiei f.

c) Să se demonstreze că $e^x\ge ex$ pentru $\forall x>0.$