Proiect cofinanţat din Fondul Social European prin Programul Operaţional Sectorial Dezvoltarea Resurselor Umane 2007-2013
Axa prioritară 1 „Educaţia şi formarea profesională în sprijinul creşterii economice şi dezvoltării societăţii bazate pe cunoaştere”
Domeniul major de intervenţie 1.1 „Acces la educaţie şi formare profesională iniţială de calitate”
Titlul proiectului: „TEEN PERFORM - Program inovator de îmbunătăţire a rezultatelor şcolare în învăţământul liceal”
Contract număr: POSDRU/153/1.1/S/136612
Beneficiar: Inspectoratul Şcolar Judeţean Suceava

Disciplina MATEMATICĂ
FIŞĂ DE LUCRU

Tema/Unitatea: Structuri algebrice

Expert educație: prof. Moisuc Niculina – Mihaela, Colegiul Tehnic Rădăuți, Suceava

Breviar teoretic

1. Legi de compoziție

Reamintim că dată fiind o mulţime nevidă *M* prin produsul cartezian *M x M* înţelegem mulţimea tuturor perechilor de elemente (x, y) (prima componentă este x, iar cea de-a doua este y) când x, y $\in$ M care, adică *M x M* = $\{x, y \mid x, y \in M\}$.

Def. Fie *M* o mulţime nevidă. Se numeşte **operaţie algebrică binară** (sau **lege de compoziţie internă** sau simplu **lege de compoziţie**) definită pe M o aplicaţie f: $M \times M \to M$, care asociază fiecărei perechi (x, y) $\in$ *M x M* unicul element f(x, y) $\in$ *M*. elementul f(x, y) se numeşte compusul lui x cu y.

Aşadar, la orice pereche (cuplu) (x, y) $\in$ *M x M* = M^2, această operaţie face să corespundă în mod unic elementul f(x, y) din aceeaşi mulţime *M*. uneori, în loc de f(x, y) se scrie xfy, dar cel mai des avem: $*$, o, $\perp, T, \cup, \cap, \oplus, \bullet, \ldots$

Elementul $x * y$ M se citeşte - „ x compus cu y” sau - „ x operat cu y”

În algebră se folosesc notaţiile „+ ” (aditivă) şi „ $\bullet$ ” (multiplicativă)

Exemple:

a) adunarea pe ***N***, care este aplicaţia + : ***N*** x ***N*** ***N***, (x,y) $\to$ x + y
b) scăderea pe ***Z***, care este aplicaţia - : ***Z*** x ***Z*** ***Z***, (x,y) $\to$ x – y
c) înmulţirea pe ***R***, care este aplicaţia „$\bullet$: ***R*** x ***R*** ***R***, (x,y) $\to$ x y
d) adunarea pe $M_n(C)$ care este aplicaţia: + : $M_n(C)$ x : $M_n(C)$, (A,B) $\to$ A+B
e) reuniunea pe mulţimea P(M) a părţilor unei mulţimi M care este aplicaţia: U : P(M) X P(M), (A,B) $\to$ A+B

2. Parte stabilă

Dacă (*M*, $*$) este o structură algebrică, iar *H* este o submulţime nevidă a lui *M*, atunci pentru (x, y) $\in$ *M* elementul x $*$ y poate să fie în mulţimea *H* sau să fie în afara ei, adică în M-H. dacă însă:

Def. Pentru orice x, y∈ *H*, compusul x ∗ y aparţine tot lui *H*, atunci spunem că H este parte stabilă a lui *M* în raport cu operaţia ∗.

Deci dacă *H* este partea stabilă a lui *M* în raport cu ∗, atunci legea de compoziţie ∗ : *H* x *H*→ *H* se spune că **este indusă de legea de compoziţie de pe M**. Se mai spune că **legea de pe M induce pe H o lege de compoziţie.**

3. Proprietăți generale ale legilor de compoziție

În cele ce urmează vom considera structura algebrică (M, ∗). Pentru legea notată ∗ vom folosi denumirea de legea star (sau stea).

P1. Asociativitatea

Def. Legea ∗ se numeşte **asociativă** dacă: (x∗y) ∗ z = x ∗ (y∗z), x,y,z∈ *M*.

În membrul stâng (x∗ y) ∗ z se efectuează mai întâi calculul din paranteză x∗ y şi apoi rezultatul acestuia se „compune” cu z. În membrul drept efectuăm operaţia din paranteză y∗ z şi apoi calculăm x ∗ (y∗z).

Definiţia spune că indiferent cum am efectua calculele algebrice în cei doi membri obţinem acelaşi rezultat.

Exemple cunoscute de legi asociative

1. *Adunarea* şi *înmulţirea* pe ***N, Z, Q, R, C*** sunt legi asociative.
2. *Reuniunea, intersecţia* pe *P(M)*sunt legi asociative.
3. *Adunarea* şi *compunerea* funcţiilor pe *F(M)* sunt legi asociative.
4. *Adunarea* şi *înmulţirea* matricilor pe $M_n(\boldsymbol{C})$sunt legi asociative.

P2. Comutativitatea

Def. Legea ∗ se numeşte **comutativă** dacă x ∗y = y ∗x, x,y∈***M***.

Din această definiţie deducem că pentru o lege comutativă nu contează ordinea în care compunem. În membrul stâng primul element în compunere este *x*, al doilea fiind *y*, în timp ce în membrul drept primul element din compunere este *y*, iar al doilea este *x*. Rezultatul este acelaşi.

Dacă *H* este o parte stabilă a lui *M* în raport cu legea ∗ şi dacă ∗ este comutativă pe *M*, atunci ∗ rămâne comutativă şi pe *H*.

Altfel spus (*H*, ∗) devine la rândul ei o structură algebrică comutativă.

Exemple cunoscute de legi comutative

1. Adunarea şi **înmulţirea pe *N, Z, Q, R, C*** sunt legi de compoziţie comutative.
2. Reuniunea şi **intersecţia** pe *P*(*M*) sunt legi comutative.
3. Adunarea şi **înmulţirea** funcţiilor pe *F*(***R***) sunt legi comutative.
4. Adunarea matricilor pe $M_{m,n}$ (*C*) este o lege comutativă.

P3. Element neutru

Def. Un element e∈ *M* se numeşte **element neutru** pentru legea ∗ dacă pentru orice x∈ *M* avem
x∗e = e∗x = x.

Uneori se mai spune că legea ∗ admite pe e∈ *M* ca element neutru dacă x∗e = e∗x = x, (∀) x ∈ *M*.

Faptul că o structură algebrică $(M, *)$ are element neutru e se notează uneori prin $(M, *, e)$.
Dacă în plus legea $*$ este comutativă, atunci condiţia ca $e \in M$ să fie element neutru pentru legea $*$ se reduce la $x * e = x$, $(\forall)$ $x \in M$ (sau $e * x = x$, $x \in M$).

Atragem atenţia că elementul neutru e al unei legi $*$ pe M trebuie să aparţină mulţimii M. Deci $e \in M$.
Nu orice lege de compoziţie pe o mulţime admite element neutru.

Teoremă. Dacă o lege de compoziţie admite element neutru, atunci acesta este unic.

Exemple cunoscute de legi cu element neutru

1. **Adunarea pe *N, Z, Q, R, C*** are ca element neutru numărul zero, când avem $x+0 = 0+x = x$, $(\forall)\, x$.
2. **Înmulţirea pe *N, Z, Q, R, C*** are ca element neutru numărul unu, când avem $1\cdot x = x\cdot 1 = x$, $(\forall)\, x$.
3. **Compunerea pe** *F(M)* admite ca element neutru funcţia identică de la *M* la *M*.
4. **Adunarea matricelor pe $M_n(\boldsymbol{C})$** are ca element neutru matricea nulă (cu toate elementele egale cu zero) notată simplu 0.
5. Matricea unitate $I_n \in M_n(\boldsymbol{C})$ reprezintă elementul neutru pentru operaţia de înmulţire a matricelor din $M_n(\boldsymbol{C})$.
6. Pe mulţimea *P(M)* a părţilor unei mulţimi *M* elementul neutru faţă de reuniune este mulţimea vidă $X \cup \Phi = \Phi \cup X = X$, $(\forall)\, X \in P(M)$, iar elementul neutru faţă de intersecţie este mulţimea totală M, $M \cap X = X$, $X \in P(M$.

P4. Element simetric

Def. Fie $(M, *)$ o structură algebrică cu element neutru $e \in M$ şi $x \in M$.
Spunem că un element $x' \in M$ este un simetric al lui x în raport cu legea $*$ dacă $x * x' = x' * x = e$.

Dacă există x' cu această proprietate, spunem că x *este element simetrizabil* în raport cu legea $*$.
Să observăm că x' este simetricul lui x, adică (x') = x.
Facem precizarea şi în acest caz că simetricul lui x, elementul x' trebuie să aparţină mulţimii M. deci odată găsit x', acesta trebuie să fie în M. Dacă legea $*$ este comutativă, atunci $x' \in M$ este simetricul lui x dacă $x * x' = e$ (sau $x' * x = e$).
Când legea este notată *multiplicativ*, vom spune element *inversabil* în loc de simetrizabil şi element *invers* în loc de simetric; inversul lui x se va nota cu x^{-1} sau $\frac{1}{x}$..
Dacă legea de compoziţie este notată aditiv, vom spune opusul lui x în loc de simtricul lui x; opusul lui x se va nota cu -x.

Exemple cunoscute de legi cu elemente simetrice

1. Elementul neutru e este element simetrizabil, un simetric al său este el însuşi.
2. Faţă de adunarea numerelor naturale, singurul element simetrizabil este 0 (zero), când $-0 = 0$.
3. Faţă de adunare pe ***Z*** (elementul neutru este 0), orice element este simetrizabil (orice element $x \in \boldsymbol{Z}$ are un opus -x) deoarece $x+(-x)) = (-x)+x = 0$.
4. Faţă de înmulţirea pe ***Z*** (elementul neutru este 1), singurele elemente inversabile sunt 1 (având simetricul 1) şi -1 (având simetricul -1) când $1^{-1} = -1$.
5. Faţă de înmulţirea pe $M_n(\boldsymbol{C})$ (elementul neutru este I_n) elementele simetrizabile sunt matricele A cu $\det(A) \neq 0$, simetricul matricei A fiind matricea inversă A^{-1}, când $A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = I_n$.
6. Faţă de compunerea pe *F(M)* (elementul neutru este I_M) elementele simetrizabile sunt funcţiile bijective, deoarece o aplicaţie f este inversabilă dacă şi numai dacă este bijectivă când

$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I_M$.

Teoremă Fie $(M, *)$ o structură algebrică asociativă şi cu element neutru e. Dacă $x \in M$ are un element simetric, atunci acesta este unic.

Teoremă Fie $(M, *)$ este o structură algebrică *asociativă* şi cu *element neutru*. Atunci:

1. Dacă elementele x, $y \in M$ sunt simetrizabile, atunci compusul lui x cu y este simetrizabil şi mai mult $(x*y)' = y'*x'$.
2. Dacă elementul $x \in M$ este simetrizabil, simetricul său x' este, de asemenea, simetrizabil şi $(x')' = x$.
3. Dacă $x \in M$ este simetrizabil, iar $y \in M$ nu este simetrizabil, atunci $x*y$, $y*x \in M$ nu sunt simetrizabile.

4. Structuri algebrice, monoid, grup

Prin **structură algebrică** se înţelege o mulţime nevidă înzestrată cu una sau mai multe legi de compoziție ce satisfac anumite axiome.

1. Definiţia monoidului, exemple remarcabile de monoid

Def Se numeşte **monoid** un cuplu $(M, *)$, unde M este o mulţime nevidă, iar „* ” este o lege de compoziție pe M ce satisface două axiome, şi anume:

M_1) legea „*” este asociativă. M_2) legea „*” este comutativă,

atunci cuplul $(M, *)$ se numeşte **monoid comutativ**.

Exemple: - monoizi comutativi: $(\boldsymbol{N}^*, +)$, $(\boldsymbol{N}^*, \circ)$, $(\boldsymbol{Q}^*, \circ)$,$(\boldsymbol{R}^*, \circ)$;

- monoizi necomutativi: $(M_n(\boldsymbol{C}), \circ)$, pentru $n \geq 2$

Obs. Orice monoid este în particular un semigrup. Reciproc nu este adevărat.

Def. Fie $(M, *)$ un monoid. Un element $x \in M$ care este simetrizabil faţă de legea „*” se numeşte **element simetrizabil** al monoidului M. Notăm $U(M) = \{x \in M \mid x \text{ simetrizabil}\}$

Exemple: 1. În monoidul $(\boldsymbol{N}, +)$ avem $\cup(\boldsymbol{N}) = \{0\}$.

2. în monoidul $(\boldsymbol{R}, \circ)$ avem $\cup(\boldsymbol{R}) = \{-1, 1\}$.

2. Puterile naturale (respectiv întregi) ale unui element (respectiv ale unui element inversabil) într-un monoid

Propoziţie Fie (M,*) un monoid şi $x \in M$. Atunci:

1) $x^n x^m = x^{n+m}$, $(\forall)$ n,m $\in$ M; **2)** $(x^n)^m = x^{nm}$, $(\forall)$ n,m $\in$ M.

Dacă, în plus, $x \in M$, (x este inversabil), egalităţile precedente au loc pentru orice n, $m \in \boldsymbol{Z}$.
Această propoziţie se transcrie aditiv astfel:

1) $nx+mx = (n+m)x$, $(\forall)$ n,m $\in$ M; **2)** $m(nx) = (nm)x$, $(\forall)$ n,m $\in$ M.

Dacă, în plus, $x \in M$, egalităţile precedente au loc pentru orice n,$m \in \boldsymbol{Z}$.

Elementul „nx” se numeşte <u>multiplul al n-lea al elementului x</u>.

3. Definiţia grupului, exemple remarcabile de grupuri

Def. Se numeşte **grup** un cuplu (**G**, $*$), unde **G** este o mulţime nevidă, iar „*” este o operaţie algebrică pe mulţimea **G** ce satisface următoarele trei axiome:

G_1) Operaţia „$*$” este asociativă;
G_2) Operaţia „$*$” are element neutru;
G_3) Orice element din G este simetrizabil faţă de operaţia „$*$”.
Dacă, în plus, satisface şi următoarea axiomă:
G_4) Operaţia „$*$” este comutativă, atunci cuplul $(G, *)$ se numeşte **grup comutativ sau abelian.**

Exemple: ($\boldsymbol{Z}$, +), ($\boldsymbol{Q}$, +), ($\boldsymbol{R}$, +), ($\boldsymbol{C}$, +), ($\boldsymbol{Q}$*, $\bullet$), ($\boldsymbol{R}$*, $\bullet$), ($\boldsymbol{R}_+$*, $\bullet$), ($\boldsymbol{C}$*, $\bullet$) – grupuri comutative.

Def. Fie (**G**, $*$) un grup. Dacă mulţimea **G** este finită spunem că grupul **G** este finit, iar numărul elementelor (cardinalul) mulţimii **G** se numeşte **ordinul grupului**. Dacă **G** este infinită, spunem că G este un **grup infinit**, sau având **ordinul** ∞.

Exemple: ($\boldsymbol{Z}$, +), ($\boldsymbol{Q}$, +), ($\boldsymbol{R}$*, $\bullet$), ($\boldsymbol{C}$*, $\bullet$).

Propoziţie Fie (M, $\bullet$) un monoid. Mulţimea U(M) a elementelor inversabile din monoidul M este un grup relativ la operaţia monoidului, numit **grupul elementelor inversabile (grupul unităţilor)** din monoidul M.

Exemple: 1. Pentru monoizii: ($\boldsymbol{N}$, $\bullet$), ($\boldsymbol{Q}$, $\bullet$), ($\boldsymbol{C}$, $\bullet$) grupurile elementelor inversabile sunt respectiv (U, $\bullet$), ($\boldsymbol{Q}$*, $\bullet$), ($\boldsymbol{C}$*, $\bullet$).

2. Pentru monoidul ($M_n(\boldsymbol{C})$), grupul elementelor inversabile este $GL_n(\boldsymbol{C})$ = $\{A \in M_n(\boldsymbol{C}) \mid \det A \neq 0\}$. Acest grup este necomutativ pentru $n \geq 2$.

4. Clase de resturi

Fie $n \geq 1$ un număr întreg fixat. Pentru fiecare $x \in \boldsymbol{Z}$, submulţimea lui $\boldsymbol{Z}$ definită prin $\hat{x} = x + n\boldsymbol{Z} = \{x + nk \mid k \in \boldsymbol{Z}\}$ se numeşte **clasa de resturi modulo n** a numărului întreg x.

Mulţimea claselor de resturi modulo n o notăm cu $\boldsymbol{Z}_n = \{\hat{0}, \hat{1}, ..., \widehat{n-1}\} = \{\hat{x} \mid x \in \boldsymbol{Z}\}$.

Propoziţie Dacă $n \geq 1$ este un număr întreg, atunci:

a) ($\boldsymbol{Z}_n$, +) este un grup abelian, numit **grupul aditiv al claselor de resturi modulo n**.

b) ($\boldsymbol{Z}_n$, $\bullet$) este un monoid comutativ, în care grupul elementelor inveraabile este numit **grupul multiplicativ al claselor de resturi modulo n relativ prime cu n**

$U(\boldsymbol{Z}_n)$ $\{\hat{k} \in \boldsymbol{Z}_n \mid (x, n) = 1\}$

5. Definiţii echivalente ale noţiunii de grup

Propoziţia 1 Fie G o mulţime nevidă înzestrată cu o operaţie notată multiplicativ. Atunci (G, $\bullet$) este un grup dacă şi numai dacă sunt îndeplinite axiomele:

G_1') Operaţia este asociativă;
G_2') Pentru fiecare $a, b \in G$ ecuaţiile ax =b şi xa = b au soluţie în G.

Propoziţia 2 Fie G o mulţime nevidă înzestrată cu o operaţie notată multiplicativ. Atunci (G, $\bullet$) este un grup dacă şi numai dacă sunt îndeplinite axiomele:

G_1') Operaţia este asociativă;

G_2') există $x \in G$ astfel încât x'x = e, $(\forall) x \in G$

G_3') pentru orice $x \in$ G există $x' \in$ G astfel încât xx' = e (se poate formula o propoziţie analogă pe dreapta).

6. Calculul într-un grup

Propoziţia 1 Fie (G, $\bullet$) un grup şi x, y, z $\in G$ arbitrare. Există echivalenţele:
1. zx = zy $\Leftrightarrow$ x = y („simplificare" la stânga). **2.** xz = yz $\Leftrightarrow$ x = y („simplificare" la dreapta).

Propoziţia 2 Dacă într-un grup (G, $\bullet$) avem $x^2 = e$, $(\forall) x \in G$, atunci grupul este abelian.

Propoziţia 3 Fie (G, $\bullet$) un grup şi $x \in G$. Atunci, pentru orice n, m $\in$ ***Z*** există egalitatea
1. $x^n x^m = x^{n+m}$ **2.** $(x^n)^m = x^{nm}$

7. Subgrupuri

Def. Fie (G, $*$) un grup. O mulţime nevidă H a lui G, cu proprietatea că este parte stabilă faţă de operaţia „$*$", iar H cu operaţia indusă este un grup, se numeşte **subgrup al grupului G**.

Exemple: 1. (***Z***, +) este subgrup al grupului (***Q***, +).
2. (***R***, +) este subgrup al grupului (***C***, +).
3. (***Q****, $\bullet$) este subgrup al grupului (***R****, $\bullet$).
4. (Un, $\bullet$) este subgrup al grupului (***C****, $\bullet$).

Lemă Fie (G, $*$) un grup şi H un subgrup al său. Atunci:
1. element neutru al subgrupului H coincide cu elementul neutru al grupului G.
2. Pentru orice element din H, inversul său în subgrupul H coincide cu inversul său în grupul G.

Teoremă Fie (G, $*$) un grup şi H o submulţime nevidă a lui G următoarele afirmaţii sunt echivalente:
1. H este subgrup al grupului G.
2. $(\forall) x, y \in H \Rightarrow xy^{-1} \in H$.
3. $(\forall) x, y \in H \Rightarrow xy \in H$ şi $(\forall) x \in H \Rightarrow x^{-1} \in H$.

Exemplu: submulţimea H $= \{z \in \boldsymbol{C}^* \; \| z| = 1\}$ este un grup al grupului (***C****, $\bullet$).

Propoziţie Fie (G, $*$) un grup şi H o submulţime finită a lui G. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:
1. H este un subgrup al grupului G;
2. H este parte stabilă faţă de operaţia din G.

Exemplu: Subgrupurile finite ale grupului (***C****, $*$) sunt grupurile de rădăcini ale unităţii Un, $n \in$ ***N**** şi numai acestea.

Propoziţie Fie (G, $*$) un grup şi H un subgrup al lui G, $H \neq G$. Dacă $x \in H$, $y \in G/H$

5. Morfisme şi izomorfisme de semigrupuri şi de monoizi

Def. 1) Fie (S, $*$) şi (S', o) două semigrupuri. O aplicaţie $f: S \rightarrow S'$ cu proprietatea că f(x$*$ y) = f(x) o f(y), $(\forall)$ n,m $\in$ S, se numeşte **morfism de semigrupuri**.
2) Fie (S, $*$) şi (S', o) doi monoizi. O aplicaţie $f: M \rightarrow M'$ care este morfism de semigrupuri se

numeşte **morfism de monoizi**. Dacă, în plus, *f* satisface proprietatea f(e) = e', unde e, e' sunt elemente neutre din M, respectiv M', spunem că *f* este un **morfism unitar de monoizi**.

3) Un morfism de la un semigrup (monoid) la el însuşi se numeşte **endomorfism** al acelui semigrup (monoid).

Exemplu: Funcţia $f : (\boldsymbol{N^*},+) \to (\boldsymbol{Z^*},\bullet)$, $f(n) = (-1)^n$ este un morfism unitar de monoizi.

Def. 1) Un morfism de semigrupuri, respectiv de monoizi, care este inversabil (funcţie inversabilă, cu inversa de asemenea morfism de semigrupuri, respectiv de monoizi) se numeşte **izomorfism de semigrupuri**, respectiv **izomorfism de monoizi.**

2) Un izomorfism de la un semigrup (respectiv monoid) la el însuşi se numeşte **automorfism** al acelui semigrup (respectiv monoid).

3) Dacă între două semigrupuri (monoizi) se poate defini un izomorfism, spunem că semigrupurile (monoizii) sunt **izomorfe(izomorfi)**.

Scriem $(S, *) \approx (S', o)$, respectiv $(M, *) \approx (M', o)$.

Exemple: 1) Funcţia $f : (\boldsymbol{N^*},+) \to (2\boldsymbol{N}, +)$, $f(n) = 2n$ este un izomorfism de semigrupuri.

2) Funcţia $f : (\boldsymbol{N^*},+) \to (2\boldsymbol{N}, +)$, $f(n) = 2n$ este un izomorfism de monoizi.

Propoziţie

Orice izomorfism de semigrupuri (respectiv de monoizi) este izomorfism de semigrupuri (respectiv de monoizi) dacă şi numai dacă este bijectiv.

6. Probleme propuse

- I -

1. Pe mulţimea $H = \{1,2,3,4,5\}$ definim aplicaţia $x \perp y$ = restul împărţirii lui xy prin 6.
Arătaţi că $(H, \perp)$ este o structură algebrică comutativă.

2. Pe mulţimea $H = \{1,2,3,4,\}$ se consideră aplicaţia $x o y$ = restul împărţirii lui x^y prin 5.
Demonstraţi că $(H, \circ)$ este o structură algebrică necomutativă.

3. Pe **R** se defineşte legea de compoziţie $xoy = 3x+y$. Arătaţi că „$\circ$” este o lege necomutativă.

4. Pe mulţimea $H = (2,\infty)$ se consideră aplicaţia $xoy = xy-2x-2y+6$. Arătaţi că $(H, \circ)$ este o structură algebrică comutativă.

5. Pe mulţimea $H = (-\infty,1)$ se defineşte aplicaţia $xoy = \dfrac{xy-2}{x+y-3}$. Demonstraţi că (H,o) este o structură algebrică comutativă.

6. Pe mulţimea **R** x **R** se defineşte operaţia algebrică $(x, y)\, o(x', y') = (xy'+x'y, yy')$.
Arătaţi că *o* este lege comutativă.

7. Fie *H* = $\{A_1, A_2, A_3, A_4\} \subset M_2(\boldsymbol{R})$, unde $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Arătaţi că $(H, \cdot)$ este o structură algebrică comutativă, unde $\cdot$ este operaţia de înmulţire a matricilor.

8. Se consideră *H* = $\left\{ A_n = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 \\ 2(1-a) & 2a-1 \end{pmatrix}; a \in \mathbf{R} \right\} \subset M_2(\boldsymbol{R})$. Demonstraţi că structura algebrică $(H, \cdot)$ este comutativă, unde $\cdot$ este operaţia de înmulţire a matricelor.

9. Fie *H* = $\left\{ \begin{pmatrix} x+4y & 2y \\ -7y & x-4y \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbf{R}, x^2 - 2y^2 = 1 \right\} \subset M_2(\boldsymbol{R})$. Arătaţi că $(H, \cdot)$ este o structură algebrică comutativă.

10. Fie *H* = $\{f_1, f_2, f_3\} \subset F(\mathbf{R} - \{0,1\})$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$, $f_3(x) = \dfrac{1}{1-x}$.
Demonstraţi că $(H, \circ)$ este o structură algebrică comutativă, unde „$\circ$” este compunerea funcţiilor.

11. Pe **R** se defineşte legea de compoziţie prin $x * y = xy + 2ax + by$, $a, b \in$ **R.** Determinaţi a, b pentru care legea este asociativă şi comutativă.

- I I -

1. Pe mulţimea *H* = $\{0,1,2,3,4\}$ definim aplicaţia o astfel $x o y = \begin{cases} x+y, & x < y \le 2 \\ x - y, & x \ge z \\ y - x, & x \le 3 \text{ şi } y > 2. \end{cases}$. Arătaţi că (*H*,o) este o structură algebrică neasociativă, necomutativă, dar cu element neutru.

2. Pe mulţimea *H* = [5, 7] definim aplicaţia $x * y$ = xy-6x-6y+42. Arătaţi că (*H*, $*$ este o structură algebrică având elementul neutru e = 7.

3. Fie *H* = ***C*** - $\{-i\}$ o submulţime a lui ***C***. Definim pe ***C*** legea de compoziţie xTy = xy + i(x+y) - (1+i). Arătaţi că (*H*, T) este o structură algebrică asociativă, comutativă cu element neutru e = 1-i.

4. Considerăm *H* = $\left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \middle| a_i \in \boldsymbol{R}, a_1 a_4 \neq 0 \right\} \subset M_2(\boldsymbol{R})$ şi legea de compoziţie pe $M_2\boldsymbol{R}$

$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_2 + b_2 \\ a_3 + a_4 b_3 & a_4 b_4 \end{pmatrix}$. Demonstraţi că $(H, *)$ este o structură algebrică asociativă, cu element neutru.

5. Fie *H* = $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} \middle| a, b \in \boldsymbol{Z} \right\} \subset M_2(\boldsymbol{Z})$. Să se arate că $(H, \cdot)$ este o structură algebrică asociativă, cu elemente neutre la stânga.

6. Pe ***R*** se defineşte legea de compoziţie $x*y$= xy-2y-2y+m, m$\in$ ***R***. Să se determine valorile lui m pentru care *H* = [2, ∞) este o parte stabilă a lui ***R*** în raport cu $*$. Determinaţi apoi elementul neutru al legii $*$ pe *H*.

7. Fie *H* = $\left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix} \middle| x \in \boldsymbol{R}, x \neq \frac{1}{2} \right\} \subset M_3(\boldsymbol{R})$. Să se arate că (*H*, ·) este o structură algebrică asociativă, comutativă, cu element neutru.

8. Să se determine valorile parametrului real a, astfel încât legea de compoziţie pe ***R*** definită prin $x*y$ = a(x+y)-xy să fie asociativă şi comutativă. Determinaţi elementul neutru.

9. Pe ***R*** se defineşte legea de compoziţie $x*y$ = 2xy-2x-2y+c, c$\in$ ***R***. Fie *H* = ***R***- $\{1\}$. Să se determine c pentru care (*H*, $*$) este o structură algebrică şi apoi precizaţi elementul neutru.

10. Pe mulţimea ***R*** se consideră legea de compoziţie $x*y$ = xy+ax+by+c. Să se arate că legea $*$ este asociativă dacă şi numai dacă admite element neutru.

- I I I -

1. Pe mulţimea ***Z*** se defineşte legea de compoziţie $x \otimes y$ = restul împărţirii lui xy la 6. Fie *H* = $\{0,1,2,3,4,5\} \subset \boldsymbol{Z}$. Să se arate că (*H*, $\otimes$) este o structură algebrică comutativă, cu element unitate. Determinaţi elementele din *H* simetrizabile în raport cu $\otimes$.

2. Pe mulţimea numerelor complexe ***C*** se defineşte legea $*$ prin $z_1 * z_2 = z_1 + z_2 - z_1 z_2$. Fie *H* = ***C*** - $\{1\}$. Să se arate că $*$ induce pe *H* o lege de compoziţie asociativă, comutativă, cu element neutru. Determinaţi elementele din *H* simetrizabile în raport cu legea dată.

3. Pe ***R*** definim legea de compoziţie xTy = 3xy+6(x+y)+10. Fie *H* = $(-2,\infty)$. Să se arate că (*H*, T) este o structură algebrică comutativă, cu element neutru şi că orice element din H este simetrizabil în raport cu legea T.

4. Fie *H* = $\{x \in R \mid x = a - b\sqrt{10},\ a, b \in \boldsymbol{Q},\ a^2 - 10b^2 = 1\}$ şi operaţia de înmulţire pe ***R***. Demonstraţi că (*H*, ·) este o structură algebrică asociativă, comut1ativă, cu element neutru şi orice element din H admite un simetric (invers) în raport cu operaţia de înmulţire.

5. Fie *H* = (-1, 1) $\subset$ ***R*** şi aplicaţia $x*y = \dfrac{x+y}{1+xy}$. Să se arate că (H, $*$) este o structură algebrică asociativă, comutativă, cu element neutru şi că orice element din H este simetrizabil în raport cu legea $*$.

6. Se consideră *H* = $(0, \infty) - \{1\}$ şi aplicaţia $x*y = x^{5\ln y}$. Să se arate că (*H*, $*$) este o structură algebrică asociativă, comutativă, cu element neutru şi că orice element din *H* este simetrizabil în raport cu legea dată.

7. Considerăm mulţimea de matrice $H = \left\{ X^n;\ n \in N,\ n \geq 1,\ X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ împreună cu operaţia de înmulţire. Demonstraţi că $(H, \cdot)$ este o structură algebrică asociativă, comutativă, cu element neutru şi că orice element din *H* este simetrizabil în raport cu înmulţirea.

8. Fie *H* = (0, 1) şi aplicaţia $x \circ y = \dfrac{xy}{2xy + 1 - (x + y)}$. Să se arate că $(H, \circ)$ este o structură algebrică asociativă, comutativă, cu element neutru şi că orice element din *H* este simetrizabil în raport cu $\circ$.

9. Fie $\left\{ A\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \boldsymbol{R} \right\} \subset M_2(\boldsymbol{R})$. Să se arate că înmulţirea matricelor de pe $M_2(\boldsymbol{R})$ induce pe *H* o lege de compoziţie asociativă, comutativă, cu element neutru din *H* este simetrizabil în raport cu această lege.