UNIUNEA EUROPEANĂ GUVERNUL ROMÂNIEI Fondul Social European POSDRU 2007-2013 Instrumente Structurale 2007-2013 MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE OIPOSDRU Inspectoratul Şcolar Judeţean Suceava

FONDUL SOCIAL EUROPEAN
Investeşte în OAMENI

Proiect cofinanţat din Fondul Social European prin Programul Operaţional Sectorial Dezvoltarea Resurselor Umane 2007-2013
Axa prioritară 1 „Educaţia şi formarea profesională în sprijinul creşterii economice şi dezvoltării societăţii bazate pe cunoaştere”
Domeniul major de intervenţie 1.1 „Acces la educaţie şi formare profesională iniţială de calitate”
Titlul proiectului: „TEEN PERFORM - Program inovator de îmbunătăţire a rezultatelor şcolare în învăţământul liceal”
Contract număr: POSDRU/153/1.1/S/136612
Beneficiar: Inspectoratul Şcolar Judeţean Suceava

Disciplina MATEMATICĂ
FIŞĂ DE LUCRU

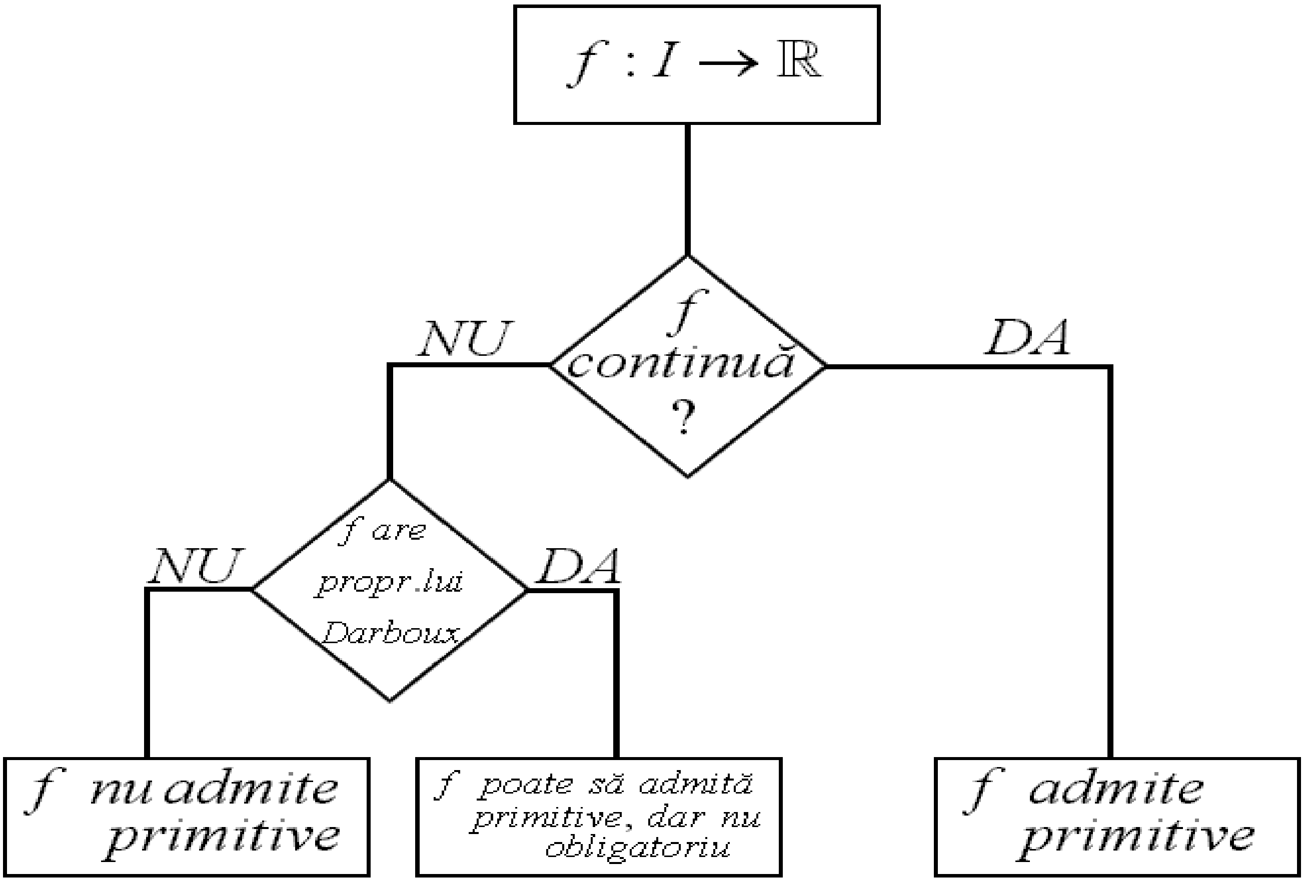
Tema/Unitatea: *Primitive*

Expert educație: prof. Moisuc Niculina – Mihaela, Colegiul Tehnic Rădăuți, Suceava

Breviar teoretic

PRIMITIVE

I. 1. Să se stabilească dacă o funcţie admite sau nu primitive:



INSPECTORATUL SCOLAR JUDEŢEAN DÂMBOVIŢA
Federația Națională a Asociațiilor de Părinți - Învățământ Preuniversitar

I. 2. Proprietăţi ale funcţiilor care admit primitive:

a) Orice funcţie continuă pe un interval $I \subset R$ admite primitive pe I.

b) Dacă $f: I \to R$ şi $f(I)$ nu este interval, atunci f nu admite primitive pe I.

c) Fie $f: I \to R$ o funcţie care admite primitive. Atunci orice funcţie $g: I \to R$ care diferă de f într-o mulţime finită nevidă de puncte, nu are primitive.

d) Funcţia $f: I \to R$, care nu are proprietatea lui Darboux, nu admite primitive.

e) $(\exists)$ funcţii care admit primitive şi nu sunt continue (continuitatea de speţa a doua)

f) $(\exists)$ funcţii care au proprietatea lui Darboux şi nu au primitive.

g) $(\exists)$ funcţii care au primitive şi ale căror pătrate nu au primitive.

Observaţie: $C(I)$ - mulţimea funcţiilor continue pe I

$P(I)$ - mulţimea funcţiilor care admit primitive pe I

$Da(I)$ - mulţimea funcţiilor care au proprietatea lui Darboux.

$$\boxed{\Rightarrow C(I) \subset P(I) \subset Da(I)}$$

I.3. Definiţii:

<u>Def.:</u> Fie $f: I \to R,\ I \subset R$. f admite primitive pe I dacă $(\exists) F: I \to R$ astfel încât:

1) F derivabilă pe I

2) $F'(x) = f(x),\ (\forall) x \in I$

<u>Def.:</u> Dacă $f: I \to R$ admite primitive, mulţimea primitivelor lui f se numeşte integrala nedefinită a lui f şi se notează $\int f(x)dx = F(x) + c,\ c = \{C | C \in R\}$.

<u>Propoziţie:</u> Fie $f: I \to R, I \subset R$. Dacă $F_1, F_2: I \to R$ sunt două primitive ale funcţiei f, atunci $(\exists)$ o constantă $c \in R$ astfel încât $F_1(x) = F_2(x) + c,\ (\forall) x \in I$.

I.4. Operaţii

Dacă $f, g: I \to R$ sunt două funcţii care admit primitive şi $\lambda \in R,\ \lambda \neq 0,$ atunci $f + g$ şi λf admit primitive şi au loc relaţiile:

$$\begin{cases} 1. \int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx \\ 2. \int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx \\ 3. \int f(x)dx = \int f(x)dx + c \end{cases}$$

I.5. Tabel de integrale nedefinite (elementare)

1. $\int \sin \alpha x dx = -\frac{1}{2} \cos \alpha x + c$

2. $\int \cos \alpha x dx = -\frac{1}{2} \sin \alpha x + c$

3. $\int e^x dx = e^x + c$

4. $\int e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} + c$

5. $\int \frac{1}{x \pm a} dx = \ln|x \pm a| + c$

6. $\int f'(x)dx = f(x) + c$

7. $\int dx = x + c$

8. $\int chxdx = shx + c$

9. $\int shxdx = -chx + c$

10. $\int \frac{1}{ch^2 x} dx = thx + c$

11. $\int \frac{1}{sh^2 x} dx = -cthx + c$

Funcţia (simplă)	**Derivata**	**Domeniul de derivabilitate**
c	0	R
x	1	R
$x^n, n \geq 1$ întreg	nx^{n-1}	R
x^r, r real	rx^{r-1}	cel puţin $(0,\infty)$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(0,\infty)$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$(0,\infty)$
e^x	e^x	R
$a^x, a>0, a \neq 1$	$a^x \ln a$	R
$\sin x$	$\cos x$	R
$\cos x$	$-\sin x$	R
tgx	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\cos x \neq 0$
$ctgx$	$\frac{-1}{\sin^2 x}$	$\sin x \neq 0$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1,1)$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1,1)$
$arctgx$	$\frac{1}{1+x^2}$	R
$arcctgx$	$\frac{-1}{1+x^2}$	R

Funcţii (compuse)	**Derivata**
u	u'
$u^n, n \geq 1$întreg	$nu^{n-1}u', u>0$
$u^r, u>0$, r real	$ru^{r-1}u', u>0$
$\sqrt{u}\,(u \geq 0)$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}, (u>0)$
$\ln u, (u>0)$	$\frac{u'}{u}, (u>0)$
e^u	$e^u \cdot u'$
$a^u, a>0, a \neq 1$	$a^u \cdot u' \cdot \ln a$
$\sin u$	$\cos u \cdot u'$
$\cos u$	$-\sin u \cdot u'$
$tgu, (\cos u \neq 0)$	$\frac{1}{\cos^2 u} \cdot u', (\cos u \neq 0)$
$ctgu, (\sin u \neq 0)$	$\frac{-1}{\sin^2 u} \cdot u', (\sin u \neq 0)$

$\arcsin u,\ (u^2 \le 1)$	$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u',\ (u^2<1)$
$\arccos u,\ (u^2 \le 1)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u',\ (u^2<1)$
$arctgu$	$\frac{u'}{1+u^2}$
$arcctgu$	$\frac{-u'}{1+u^2}$

II. Integrarea prin părţi

Teoremă: Dacă $f,g:I\to R$ sunt funcţii derivabile cu derivate continue, atunci $f'g,\ fg',(fg)'$, admit primitive pe I şi sunt exprimate prin relaţia: $\int f(x)g'(x)dx = f(x)\cdot g(x) = \int f'(x)\cdot g(x)dx$

III.1 Prima metodă de schimbare de variabilă

Teoremă: Fie $I,J\subset R$ şi $\varphi:I\to J,\ f:J\to R$ funcţii cu proprietăţile:

1. φ derivabilă pe I

2. f admite primitive pe J (F este o primitivă a sa). Atunci funcţia $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$ admite primitiva pe I, iar $F\circ\varphi$ este o primitivă a lui $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$ de forma: $\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx = F(\varphi(x))+C$

Observaţie: Etape: ***a)*** Fie $h:I\to R$ care are primitive

b) Se caută $I\xrightarrow{\varphi}J\xrightarrow{f}R$ astfel încât $h(x)=f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$

c) Se caută o primitivă $\int f(t)dt = F(t)+c$

d) O primitivă a lui h este $H=F\circ\varphi$ adică $\int h(x)dx = \int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x) = F(\varphi(x))+c$

e) Practic $\varphi(x)=t$ şi se diferenţiază ca o egalitate $\varphi(x)=t\,/\,d \Rightarrow d\varphi(x)=dt$

sau $\varphi'(x)dx = dt \Rightarrow \int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x) = \int f(t)\cdot dt = F(t)+c = F(\varphi(x))+c$

III.2 Primitivele funcţiilor raţionale simple

1) $\int\frac{1}{(x-a)^n}dx = \frac{-1}{n-1}\frac{1}{(X-a)^{n-1}}+c$; $\int\frac{1}{x-a}dx = \ln|x-a|+c,\ n=1$ **2)** $\int\frac{1}{ax^2+bx+c}$

cazul $\Delta>0$: $$\frac{1}{a}\int\frac{1}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2}dx = \frac{1}{a}\frac{1}{2\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}}\ln\left|\frac{x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}}{x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}}\right|+c$$

cazul $\Delta=0$: $$\frac{1}{a}\int\frac{1}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}dx = -\frac{1}{a}\frac{1}{x+\frac{b}{2a}}+c$$

cazul $\Delta<0$: $$\frac{1}{a}\int\frac{1}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2}dx = \frac{1}{a}\frac{1}{\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}}arctg\left(\frac{x+\frac{b}{2a}}{\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}}\right)+c$$

3) $I_n=\int\frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^n}dx=\frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{2(n-1)}\frac{x}{\left(a^2+x^2\right)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2(n-1)}\right]I_{n-1}$

Observație: În cazul $\left(ax^2+bx+c\right)^n=a^n\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2\right]^n=a^n\left(t^2+k^2\right)^n\ !\begin{cases}x+\frac{b}{2a}=t\ \vert d\\ \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}=k\end{cases}\Rightarrow dx=dt$

4) $f:I\to R,\ f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, grad $P<$ grad Q

a) Dacă $Q(x)$ are rădăcini simple: $Q(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$ *unde* $a_1\neq a_2\neq\ldots\neq a_n\Rightarrow$

$$f(x)=\frac{P(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\ldots+\frac{A_n}{x-a_n}$$

b) Dacă $Q(x)$ are rădăcini multiple: $Q(x)=(x-\alpha)^m\Rightarrow f(x)=\frac{P(x)}{(x-\alpha)^m}=\frac{B_1}{x-\alpha}+\frac{B_2}{(x-\alpha)^2}+\ +\ldots+\frac{B_m}{(x-\alpha)^m}$

c) Dacă $Q(x)$ nu are rădăcini reale: $\left(\Delta_{1,2,\ldots,p}<0\right)$

$$Q(x)=\left(X^2+2b_1x+c_1\right)\left(X^2+2b_2x+c_2\right)\ldots\left(X^2+2b_px+c_p\right)$$

$$f(x)=\frac{P(x)}{\left(X^2+2b_1x+c_1\right)\left(X^2+2b_2x+c_2\right)\ldots\left(X^2+2b_px+c_p\right)}=$$

$$=\frac{C_1x+D_1}{X^2+2b_1x+c_1}+\frac{C_2x+D_2}{X^2+2b_2x+c_2}+\ldots+\frac{C_px+D_p}{X^2+2b_px+c_p}$$

d) Dacă $Q(x)$ nu are rădăcini reale: $\left(\Delta_{i=\overline{(1,n)}}<0\right):Q(x)=\left(x^2+2b_qX+c_q\right)^s$

$$f(x)=\frac{P(x)}{\left(x^2+2b_qX+c_q\right)^s}=\frac{M_1X+N_1}{x^2+2b_qX+c_q}+\frac{M_2X+N_2}{\left(x^2+2b_qX+c_q\right)^2}+\ldots+\frac{M_sX+N_s}{\left(x^2+2b_qX+c_q\right)^s}$$

e) Dacă $Q(x)$ are în componență descompunerile a,b,c,d atunci:

$$Q(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)(x-\alpha)^m\left(x^2-2b_1X+c_1\right)\cdot\left(x^2+2b_2X+c_2\right)\ldots\left(x^2+2b_pX+c_p\right)\cdot$$

$$\cdot\left(x^2+2b_qX+c_q\right)^s\quad unde\ \Delta<0,\Delta_2<0,\Delta_p<0,\Delta_s<0$$

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\ldots+\frac{A_n}{x-a_n}+\frac{B_1}{x-\alpha}+\frac{B_2}{(x-\alpha)^2}+\ldots+\frac{B_m}{(x-\alpha)^m}+\frac{C_1x+D_1}{x^2+2b_1X+c_1}+$$

$$+\frac{C_2x+D_2}{x^2+2b_2X+c_2}+\ldots+\frac{C_px+D_p}{x^2+2b_pX+c_p}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+2b_qX+c_p}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+2b_qX+c_p\right)^2}+\ldots+\frac{M_sx+N_s}{\left(x^2+2b_qX+c_p\right)^s}$$

Observații:

1) Se determină constantele de la numărător și integrăm fiecare expresie în parte.

2) Pentru $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, $gradR<gradQ$, $g(x)=\frac{R(x)}{Q(x)}$ se tratează cu a,b,c,d,e (form.)

III.3 Primitivele funcţiilor raţionale simple

1. $\int R(\sin x, \cos x)\,dx;\ \int R(tgx)\,dx; N: tgx = t$

a) $N: tg\frac{x}{2} = t;\ \ F!\begin{cases} \sin x = \dfrac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} \\ \cos x = \dfrac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} \end{cases};\ \ \frac{x}{2} = arctgt \Leftrightarrow x = 2arctgt\,/\,d \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2}dt$

$\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{1}{1+t^2}dt$ **b)** R impară în $\sin x \Rightarrow \cos x = t$ **c)** R impară în $\cos x \Rightarrow \sin x = t$

d) R pară $\Rightarrow tgx = t,\ x = arctgt\,/\,d \Rightarrow dx = \frac{1}{1+t^2}dt,\ \sin x = \frac{\pm tgx}{\sqrt{1+tg^2x}}, \cos x = \frac{\pm 1}{\sqrt{1+tg^2x}}$

2. $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx;\ m,n \in Z \Rightarrow \begin{cases} m\ \ impar \Rightarrow \cos x = t \\ n\ \ par \Rightarrow \sin x = t \end{cases}$

3. $\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)dx$ substituţia: $x = a\sin t'\ \ sau\ \ x = a\cos t\,/\,d \Rightarrow dx = a\cos tdt...\ \sqrt{a^2-x^2} = a\cos t$

4. $\int R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)dx$ substituţia: $x = atgt\,/\,d \Rightarrow dx = \frac{a}{\cos^2 t}dt,\ \sqrt{a^2+x^2} = \frac{a}{\cos t}$

5. $\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)dx\ \ N:\ x = \frac{a}{\cos t}\ sau\ x = \frac{a}{\sin t}\,/\,d,\ \ dx = \frac{a\sin t}{\cos^2 t}dt$

6. $\int R\left(e^{\alpha x}\right)dx,\ \alpha \in R^*\ \ \ N: e^{\alpha x} = t\,/\ln \Rightarrow \alpha x = \ln t \Rightarrow x = \frac{1}{2}\ln t\,/\,d \Rightarrow dx = \frac{1}{\alpha}\frac{1}{t}dt$

7. $\int R\left(x, x^{r_1}, x^{r_2}, x^{r_3}\right)dx,\ r_1 = \frac{p_1}{q_1}; r_2 = \frac{p_2}{q_2}; r_3 = \frac{p_3}{q_3};\ q_1, q_2, q_3 \in N^*,\ n = c.m.m.m.c\left(q_1, q_2, q_3\right)$. <u>Substituţie</u>: $x = t^n$.

8. $\int R\left(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx\ \ \ \ N\ \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}} = t\,/^2 \Rightarrow \frac{ax+b}{cx+d} = t^2 \Rightarrow x = \frac{ax+b}{cx+d}\,/\,d \Rightarrow ...$

9. Substituţiile Euler: $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ **a.** $\Delta < 0 \Rightarrow \sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\cdot x \pm t = xt \pm \sqrt{c}\ \ \ (a, c > 0)$

b. $\Delta < 0 \Rightarrow \sqrt{ax^2+bx+c} = t\left(x - x_0\right)$

10. $\int \frac{dx}{(mx+n)^p\sqrt{ax^2+bx+c}}$ Substituţie: $mx + n = \frac{1}{t}$

11. Substituţii pentru funcţii binome (Cebârşev): $\int x^m\left(ax^n+b\right)^p dx;\ m, n, p \in Q$

a. $p \in Z, \frac{m+1}{n} = \frac{r}{s} \Rightarrow x^{\frac{n}{s}} = t$ **b.** $\frac{m+1}{n} \in Z,\ p = \frac{r}{s} \Rightarrow \left(ax^2+b\right)^{\frac{1}{s}} = t$

c. $\frac{m+1}{n} + p \in Z,\ p = \frac{r}{s} \Rightarrow \left(a+bx^{-n}\right)^{\frac{1}{s}} = t$

12. $\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ grad Q = grad P - 1

Coeficienţii polinomului Q şi λ se determină prin derivare şi identificare.

13. $\int e^{\lambda x}P(x)dx = e^{\lambda x}Q(x)+c$, grad Q = grad P

14. $\int P(x)\sin\lambda dx = Q(x)\sin\lambda x + S(x)\cos\lambda x + C$. $Q(x)$ şi $S(x)$ se determină prin derivare şi identificare.

Tipuri de itemi

1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2x, & x<0\\ 3x, & x\ge 0\end{cases}$ Să se arate că f admite primitive şi să se calculeze o primitivă a sa.

2. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x^2-4x|$ Să se arate că f admite primitive şi să se calculeze o primitivă a sa.

3. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\max(x,x^2,x^3), & x\le 0\\ \min(x,x^2,x^3), & x>0\end{cases}$ Să se arate că f admite primitive şi să se calculeze o primitivă a sa.

4. $f:\left(-\frac{1}{3},\infty\right)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\ln(3x+1), & x\in(-\frac{1}{3},0)\\ mx, & x\ge 0\end{cases}$ $m\in R$ Să se arate că f admite primitive şi să se calculeze o primitivă a sa.

5. Să se determine valorile lui m∈R astfel încât funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dată de

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^n-a^n}{x-a}, & x\in R-\{a\}\\ m, & x=a\end{cases},\quad cu\ n\in N$$ să admită primitive pe R.

6. Se dă funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x\ne 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ Să se arate că f admite primitive şi să se determine forma lor.

7. Se dă funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\sin^2\frac{1}{x}, & x\ne 0\\ \alpha, & x=0\end{cases}$ Să se arate că f admite primitive dacă şi numai dacă α = ½ .

8. Se dă funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\cos\frac{1}{x}, & x\ne 0\\ \alpha, & x=0\end{cases}$ Să se arate că f admite primitive pe R

9. Aratati că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\ne 0\\ \alpha, & x=0\end{cases}$ are primitive dacă şi numai dacă α = 0.

10. Să se arate că funcţia $f: R \to R$, $f(x)=\begin{cases} \sin^3\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x} & ,x \neq 0 \\ 0 & ,x=0 \end{cases}$ are primitive pe R.

11. Să se arate că funcţia $f: R \to R$, $f(x)=\begin{cases} \sin\frac{1}{x}\cos^3\frac{1}{x} & ,x \neq 0 \\ 0 & ,x=0 \end{cases}$ are primitive pe R.

12. Să se determine α, încât functia $f: R \to R$, $f(x)=\begin{cases} \sin^2\frac{1}{x}\cos^4\frac{1}{x} & ,x \neq 0 \\ \alpha & ,x=0 \end{cases}$ să admită primitive pe R.

13. Fie funcţia $f: R \to R$, $f(x)=\begin{cases} x-\sin\frac{1}{x} & ,x \neq 0 \\ a & ,x=0 \end{cases}$ Studiaţi existenţa primitivelor funcţiei f

14. Fie funcţia $f: R \to R$, $f(x)=\begin{cases} x^3 & ,x \in R \\ x^4 & ,x \in R-Q \end{cases}$ Arătaţi că funcţia f nu admite primitive pe R.

15. Să se arate că funcţia $f: R \to R$, $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x} & ,x \neq 0 \\ 0 & ,x=0 \end{cases}$ Să se arate că f are proprietatea lui Darboux, dar nu are primitive pe R.

16. Fie funcţia $f: R \to R$, $f(x)=\begin{cases} \sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x} & ,x>0 \\ a & ,x \leq 0 \end{cases}$ Să se studieze dacă funcţia f admite primitive peR.

Primitive bac

M1

1. Se consideră funcţia f: $(0,\infty) \to R$, f(x)=$\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$. Să se arate că funcţia F: $(0,\infty) \to R$, F(x)=$2\sqrt{x}(\ln x-2)$ este o primitivă a funcţiei f.

2. Se consideră funcţia f: $R \to R$, f(x)=$\frac{1}{x^2+x+1}$. Să se arate că funcţia F: $R \to R$, F(x)=$\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$ este o primitivă a funcţiei f.

3. Se consideră funcţia f: $R \to R$, f(x)=$\frac{1}{|x-a|+3}$, $a \in R$. Să se arate că, pentru orice a real, f are primitive strict crescătoare.

4. Se consideră funcţiile f: $(-1,\infty) \to R$, f(x)=$\frac{2x}{(x+1)(x^2+1)}$ şi F: $(-1,\infty) \to R$, F(x)=$a\ln(x+1)+b\ln(x^2+1)+c\operatorname{arctg}x$, unde a,b,c sunt parametri reali.. Să se determine a,b,c astfel încât F să fie primitivă a funcţiei f.

5. Se consideră funcţia f: $R \to R$, f(x)=$\frac{x^3-3x+a}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$, $a \in R$. Să se arate că funcţia F: $R \to R$, F(x)=$\frac{x^2+ax+5}{\sqrt{x^2+1}}$ este o primitivă a funcţiei f.

6. Se consideră funcţia f: $[0,\infty) \to R$, f(x)=$\begin{cases} \frac{e^x-e^{-2x}}{x}, & x>0 \\ 1 & , x=0 \end{cases}$. Să se arate că funcţia f are primitive pe $[0,\infty)$.

7. Se consideră funcţia f: $[-1,1] \to R$, f(x)=arcsinx. Să se arate că funcţia $g:[-1,1] \to R$, g(x)=xf(x) are primitive, iar acestea sunt strict crescătoare.

8. Se consideră funcţia f: $R \to R$, f(x)=$\frac{1+x}{x^2+1}$. Să se arate că funcţia F: $R \to R$, F(x)= $\operatorname{arctg}x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$ este o primitivă a funcţiei f.

9. Se consideră funcţia f: $R \to R$, f(x)={x}(1-{x}), unde {x} este partea fracţionară alui x. Să se arate că funcţia f are primitive pe R.

10. Se consideră funcţia f: $\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \to R$, f(x)= $x^2\sin x$. Să se arate că există numerele reale a,b,c astfel încât F: $\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \to R$, F(x)= $(ax^2+b)\cos x + cx\sin x$ să fie o primitivă a funcţiei f.

11. Se consideră funcţia f: $[1,2] \to R$, f(x)=$\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$. Să se arate că funcţia F: $[1,2] \to R$, $F(x)=\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right)$ este o primitivă a funcţiei f.

12. Fie a şi b numere reale şi funcţia F: $R \to R$, F(x)=$\begin{cases} ax+b, & x<1 \\ \ln^2 x+1, & x\geq 1 \end{cases}$. Să se determine a şi b astfel încât funcţia F să fie o primitivă a unei funcţii f.

13. Se consideră funcţia f: $R \to R$, f(x)=$\begin{cases} xe^x, & x\leq 0 \\ \sin x, & x>0 \end{cases}$. Să se arate că funcţia f are primitive pe R. Să se determine primitiva F a funcţiei f care are proprietatea F(0)=-1

14. Se consideră funcţia f: $(1,\infty) \to R$, f(x)=$\frac{1}{x(x+1)(x+2)}$. Să se determine o primitivă a funcţiei f.

15. Se consideră funcţia f: $R \to R$, f(x)=$\ln(1+\sin^2 x)$, Să se arate că orice primitivă a funcţiei f este crescătoare pe R.

16. Fie a şi b numere reale şi funcţia F: $R \to R$, F(x)=$\begin{cases} axe^x - x, & x\leq 0 \\ x\cos x + b, & x>0 \end{cases}$. Să se determine a şi b astfel încât funcţia F să fie o primitivă a unei funcţii f.

17. Se consideră funcţia f: $R \to R$, f(x)= $\sin^3 x \cos x$ şi F o primitivă a funcţiei f. Să se arate că există $c \in R$ astfel încât $4F(x) = \sin^4 x + c$.
18. Se consideră funcţia f: $R \to R$, f(x)= $\frac{1}{3+\cos x}$, Să se arate că orice primitivă a funcţiei f este crescătoare pe R.
19. Se consideră funcţiile $f_n : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to R$, $f_n(x) = \frac{1}{\cos^n x + \sin^n x}, n \in N^*$. Să se arate că, dacă F este o primitivă a funcţiei f_4 , atunci $F''(x) = (f_4(x))^2 \sin 4x, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
20. Se consideră funcţia f: $R \to R$, f(x)= $\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}$, Să se arate că orice primitivă a funcţiei f este strict crescătoare pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
21. Se consideră funcţia $f:(e,\infty) \to R$, f(x)= $\frac{\ln x}{x}$. Să se determine mulţimea primitivelor funcţiei f.
22. Se consideră funcţia f: $R \to R$, f(x)= $\frac{x}{x^2+1}$. Dacă F este primitive lui f care verifică relaţia F(0)=1, să se calculeze F(1).
23. Se consideră funcţia f: $R \to R$, f(x)= $x^2 \sin x$ şi fie F o primitivă a funcţiei f. Să se arate că funcţia F nu are limită la $+\infty$.
24. Se consideră funcţia f: $[0,1] \to R$, f(x)= $x(x-1)e^x$. Să se arate că există numerele reale a,b,c, astfel încât funcţia F: $R \to R$, $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$ să fie o primitivă a funcţiei f.
25. Se consideră funcţia f: $R \to R$, f(x)= $\frac{1}{3+\cos x}$, Să se determine o primitivă a restricţiei funcţiei f la intervalul $[0,\pi)$.

Primitive bac
M2

1. Se consideră funcţia f: $(0,\infty) \to R$, f(x)= $1-\frac{1}{x^2}$. Să se arate că funcţia F: $(0,\infty) \to R$, F(x)= $x+\frac{1}{x}$ este o primitivă a funcţiei f.
2. Se consideră funcţia f: $R \to R$, f(x)= $\begin{cases} x^2-3x+2, x \le 1 \\ \ln x, \quad x > 1 \end{cases}$
   a. Să se arate că funcţia f admite primitive.
   b. Să se demonstreze că orice primitivă a funcţiei f este convexă pe $(1,\infty)$.
3. Se consideră funcţia f: $[0,1] \to R$, f(x)=1- $\sqrt{x}$. Să se determine mulţimea primitivelor funcţiei f.

4. Se consideră funcţia f: $[0,1] \to R$, f(x)= $\sqrt{x+2}$. Să se calculeze $\int f^2(x)dx$.
5. Se consideră funcţia f: $R \to R$, f(x)= $\begin{cases} x^2+x-2, x<1 \\ (x+1)\ln x, x \geq 1 \end{cases}$. Să se arate că funcţia f admite primitive pe R.
6. Se consideră funcţia f: $R \to R$, f(x)= $x^{2009}+x+1$. Să se determine primitiva F a funcţiei f care are proprietatea F(0)=1.
7. Se consideră funcţia f: $[0,\infty) \to R$, f(x)=$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}$. Să se arate că $\int (x+1)(x+2)f(x)dx = x^2+3x+C, x \geq 0$.
8. Se consideră funcţiile f,g: $[0,\infty) \to R$, f(x)=$\frac{x^3}{(x+1)}$ şi g=f''(x). Să se determine primitiva funcţiei g a cărei asimptotă spre ∞ este dreapta de ecuaţie y=2x.
9. Se consideră funcţia f: $R \to R$, f(x)= e^{x^2} . Să se determine $\int f(\sqrt{x})dx, x \in [0,\infty)$.
10. Se consideră funcţia f: $[0,1] \to R$, f(x)=1-x. Să se determine mulţimea primitivelor funcţiei f.
11. Se consideră funcţia f: $R \to R$, f(x)=$\frac{x^2+2x+1}{x^2+1}$. Să se determine $\int (x^2+1)f(x)dx$.
12. Se consideră funcţia f: $R \to R$, f(x)= $x^{1004}+2009^x$.
    a. Să se determine $\int f(x)dx$.
    b. Să se demonstreze că orice primitivă a funcţiei f este crescătoare pe R.
13. Se consideră funcţia f: $[1,\infty) \to R$, f(x)=$\ln x+\frac{1}{x}$. Să se arate că funcţia F: $[1,\infty) \to R$ F(x)=(x+1)lnx-x+1 este o primitivă a funcţiei f.
14. Se consideră funcţia f: $[2,\infty) \to R$, f(x)= $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}$. Să se demonstreze că orice primitivă a funcţiei f este concavă pe $[2,\infty)$.
15. Se consideră funcţia f: $(0,\infty) \to R$, f(x)= $e^x+\ln x$. Ştiind că g: $(0,\infty) \to R$, g(x)=f(x)-lnx, să se arate că $\int g(x)dx = g(x)+C, x>0$.
16. Se consideră funcţiile f,g: $R \to R$, f(x)=$\frac{e^{2x}+1}{e^x}$ şi g(x)= $\frac{e^{2x}-1}{e^x}$. Să se arate că funcţia g este o primitivă a funcţiei f.
17. Se consideră funcţia f: $R \to R$, f(x)= x^2+e^x+1. Să se demonstreze că orice primitivă a funcţiei f este crescătoare pe R.
18. Se consideră funcţia f: $R \to R$, f(x)=$\begin{cases} e \cdot e^x, x \leq -1 \\ 2+x, x>-1 \end{cases}$. Să se arate că funcţia f admite primitive pe R.

19. Se consideră funcţia f: $R \to R$, f(x)= $\begin{cases} x_2 + e^x, x \le 0 \\ \sqrt{x} + 1, x > 0 \end{cases}$. Să se arate că funcţia f admite primitive pe R.
20. Se consideră funcţia f: $R \to R$, f(x)=$(x-1)^{2007}$. Să se calculeze $\int f(x)dx$.
21. Se consideră funcţia f: $R \to R$, f(x)= xe^x. Să se arate că funcţia F:$R \to R$, F(x)= $(x-1)e^x$ este o primitivă a funcţiei f.
22. Se consideră funcţia f: $[1,\infty) \to R$, f(x)= $\dfrac{1}{x(1+\ln x)}$. Să se demonstreze că orice primitivă a funcţiei f este crescătoare pe $[1,\infty)$.
23. Se consideră funcţiile f,g: $(0,\infty) \to R$, f(x)= e^x şi g= $\dfrac{1}{x}$. Să se calculeze primitivele funcţiei f+g.
24. Se consideră funcţiile $f_m : [0,1] \to R$ definite prin $f_m(x) = m^2x^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$, unde $m \in R$. Să se calculeze $\int f_1(x)dx$.
25. Se consideră funcţia f: $(0,\infty) \to R$, f(x)=lnx-x. Să se demonstreze că orice primitivă a funcţiei f este concavă pe $(0,\infty)$.
26. Se consideră funcţia f: $(0,\infty) \to R$, f(x)= $\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{(x+1)^2}$. Să se demonstreze că orice primitivă a funcţiei f este crescătoare pe $(0,\infty)$.
27. Se consideră funcţia f: $R \to R$, f(x)= $3^x + 3^{-x}$. Să se demonstreze că orice primitivă a funcţiei f este concavă pe $(-\infty,0]$ şi convexă pe $[0,\infty)$.
28. Se consideră funcţia f: $[1,\infty) \to R$, f(x)=lnx+ $\dfrac{1}{x}$. Să se arate că funcţia F: $[1,\infty) \to R$, F(x)=(x+1)lnx-x+1, este o primitivă a funcţiei f care se anulează în x=1.
29. Se consideră funcţia f: $(0,\infty) \to R$, f(x)=1+lnx. Să se arate că funcţia g: $(0,\infty) \to R$, g(x)=xlnx este o primitivă a funcţiei f.
30. Se consideră funcţiile f,g: $(0,\infty) \to R$, date prin f(x)= $x^2 + x\ln x$ şi g(x)=2x+lnx+1. Să se arate că f este o primitivă a funcţiei g.
31. Se consideră funcţia f:$R \to R$, f(x)= $e^x + 3x^2 + 2$. Să se arate că funcţia F: $R \to R$, F(x)= $e^x + x^3 + 2x - 1$ este o primitivă a funcţiei f.
32. Se consideră funcţia f:$R \to R$, f(x)= $\begin{cases} x+2, x<0 \\ e^x + 1, x \ge 0 \end{cases}$. Să se arate că funcţia f admite primitive.
33. Se consideră funcţiile f,g: $R \to R$ definite prin f(x)= $\ln(x^2+1)$ şi g(x)= $\dfrac{2x}{x^2+1}$. Să se arate că $\int g(x)dx = f(x) + C$.
34. Se consideră funcţia f:$(0,\infty) \to R$, f(x)= $1 - \dfrac{1}{x}$. Să se arate că funcţia F: $(0,\infty) \to R$, F(x)=x-lnx este o primitivă a funcţiei f.

35.Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to R$, $f(x)=x-\frac{1}{x}$. Să se demonstreze că orice primitivă a funcţiei f este covexă pe intervalul $(0,\infty)$.

36.Se consideră funcţia $f: [1,\infty)\to R$, $f(x)=\frac{\ln x}{x}$. Să se arate că funcţia $g: [1,\infty)\to R$, $g(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$ este o primitivă a funcţiei f.

37.Se consideră funcţia $f:\left(\frac{1}{2},\infty\right)\to R$, $f(x)=\sqrt{2x-1}$. Să se calculeze $\int f^2(x)dx$.

38.Se consideră funcţiile $f,g: (0,\infty)\to R$, date prin $f(x)=\sqrt{x}+\ln x$ şi $g(x)=\frac{\sqrt{x}+2}{2x}$. Să se arate că f este o primitivă a funcţiei g.

39.Se consideră funcţia $f:R\to R$, $f(x)= e^x+x^2+2x$. Să se arate că funcţia $F: R\to R$, $F(x)=e^x+\frac{x^3}{3}+x^2+1$ este o primitivă a funcţiei f.

40.Se consideră funcţia $f:R\to R$, $f(x)=\begin{cases} x+1 & ,x<0 \\ \frac{1}{x+1}-\sqrt{x} & ,x\geq 0 \end{cases}$. Să se arate că funcţia f admite primitive pe R.

41. Se consideră funcţiile $f_m:R\to R$ definite prin $f_m(x)=m^2x^2+mx+1$, unde $m\in R^*$. Să se demonstreze că funcţiile $f_m:R\to R$ sunt crescătoare pentru orice $m\in R^*$.

42.Se consideră funcţia $F:[0,\infty)\to R$, $F(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$. Să se determine funcţia $f:[0,\infty)\to R$, astfel încât F să fie o primitivă a funcţiei f .

43.Se consideră funcţia $f:R\to R$, $f(x)=\begin{cases} x^3 & ,x\leq 0 \\ x+\sqrt{x} & ,x>0 \end{cases}$. Să se arate că funcţia f admite primitive pe R.

44.Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to R$, $f(x)=\frac{1}{x^2}$. Să se determine primitiva $F:(0,\infty)\to R$ a funcţiei f , care verifică relaţia F(1)=0.

45.Se consideră funcţiile $f_m:[1,2]\to R$ definite prin $f_m(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+...+\frac{1}{x+m}$ unde $m\in R$. Ştiind că F este o primitivă a funcţiei f_1 ,să se arate că funcţia $G:[1,2]\to R$, definită prin $G(x)=F(x)-\frac{5}{6}x$ este crescătoare.

46.Se consideră funcţia $f: R\to R$, $f(x)=\begin{cases} x+5, & x<-1 \\ 3x^2+1, & x\geq -1 \end{cases}$. Să se arate că funcţia f admite primitive pe R.

47.Se consideră funcţiile $f,F:(0,\infty)\to R$, $f(x)=e^x+\frac{x-1}{x}$ şi $F(x)=e^x+x-\ln x$. Să se arate că funcţia F este o primitivă a funcţiei f.

48. Se consideră funcţia f: R $\to$R , f(x)= $\begin{cases} \frac{x+1}{x-2}, x \le 1 \\ \ln x - 2, x > 1 \end{cases}$. Să se arate că funcţia f admite primitive pe R.

49. Se consideră funcţia f: R $\to$R , f(x)= $\frac{2x}{1+x^2}$. Să se arate că orice primitivă a funcţiei f, este crescătoare pe $(0,\infty)$.

50. Se consideră funcţiile $f_m : R \to R$ definite prin $f_m(x) = \frac{1}{(x^2+1)^n}$. Să se determine primitive G a funcţiei g(x)= $\frac{1}{f_2(x)}$, care verifică relaţia $G(1) = \frac{13}{15}$.

51. Se consideră funcţia f: $(0,\infty) \to$R , f(x)= $x + \frac{1}{x}$. Să se determine $\int f(x)dx$.

52. Se consideră funcţia f: $(0,1) \to$R , f(x)= $\sqrt{x+2}$. Să se calculeze $\int f^2(x)dx$.

53. Se consideră funcţiile $f_m : R \to R$ definite prin $f_m = x^m + 1$. Să se determine $\int f_1(x)dx$.

54. Se consideră funcţiile $f_m : [0,1] \to R$ definite prin $f_m = x^m + (1-x)^m$. Să se determine $\int f_2(x)dx$.

55. Se consideră funcţiile $f_m : [0,2] \to R$ definite prin $f_m = (2-x)^n$. Să se determine $\int f_1(x)dx$.

56. Se consideră funcţia f: $[1,2] \to R$, $f(x) = x + \frac{2}{x}$. Să se determine $\int f(x)dx$.

57. Să se determine $\int (x+\sqrt{x})dx$.

58. Să se determine $\int \left(\frac{1}{x} - 3\sqrt{x}\right)dx$.

59. Se consideră funcţia f: $[0,1] \to$R, f(x)=1-x. Să se determine $\int f(x)dx$.

60. Se consideră funcţiile $f_m : [0,1] \to R$ definite prin $f_m = (x^{m+1} + 1) \cdot e^x$. Să se determine $\int f_0(x) \cdot e^{-x} dx$.

61. Se consideră funcţiile $f_m : [0,1] \to R$ definite prin $f_n(x) = e^{x^n}, n \in N^*$. Să se determine $\int f_1(x)dx$.