Proiect cofinanţat din Fondul Social European prin Programul Operaţional Sectorial Dezvoltarea Resurselor Umane 2007-2013
Axa prioritară 1 „Educaţia şi formarea profesională în sprijinul creşterii economice şi dezvoltării societăţii bazate pe cunoaştere”
Domeniul major de intervenţie 1.1 „Acces la educaţie şi formare profesională iniţială de calitate”
Titlul proiectului: „TEEN PERFORM - Program inovator de îmbunătăţire a rezultatelor şcolare în învăţământul liceal”
Contract număr: POSDRU/153/1.1/S/136612
Beneficiar: Inspectoratul Şcolar Judeţean Suceava

Disciplina MATEMATICĂ
FIŞĂ DE LUCRU

Tema/Unitatea: Probleme de numărare și elemente de combinatorică. Matematici aplicate. Probabilități

Prof. Marin Cristian , Colegiul „Vladimir Streinu " Găești

PERMUTĂRI. Mulţimi ordonate cu n elemente

Fie A o mulţime finită cu **n** elemente. Această mulţime poate fi ordonată în mai multe moduri, obţinându-se astfel mulţimi ordonate diferite ce se deosebesc între ele doar prin ordinea elementelor.
Definiţie: Se numeşte permutare a mulţimii A fiecare din mulţimile ordonate ce se formează cu cele **n** elemente ale mulţimii A . Se spune că este o permutare a elementelor sale sau o permutare de **n** elemente.

Numărul permutărilor de **n** elemente se notează cu P_n şi se citeşte " permutări de n " . Se observă:

1. O mulţime cu un singur element poate fi ordonată într-un singur mod $\Rightarrow P_1 = 1.$

2. O mulţime cu două elemente $A = \{a_1 ; a_2\}$ poate fi ordonată: $(a_1 ; a_2), (a_2 ; a_1)$
$\Rightarrow P_2 = 2 = 1 \cdot 2$

3. O mulţime cu trei elemente $A = \{a_1 ; a_2 ; a_3\}$ poate fi ordonată: $(a_1 ; a_2 ; a_3)$;
$(a_1 ; a_3 ; a_2) ; (a_2 ; a_1 ; a_3) ; (a_2 ; a_3 ; a_1) ; \ (a_3 ; a_1 ; a_2) ; (a_3 ; a_2 ; a_1) \Rightarrow$
$P_3 = 6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$.

Vrem să determinăm numărul permutărilor unei mulţimi date cu **n** elemente, adică numărul modurilor în care poate fi ordonată o mulţime dată cu **n** elemente.

Se convine că mulţimea vidă poate fi ordonată într-un singur mod $\Rightarrow P_0 = 1.$ Se defineşte $0\,! = 1.$

Se va folosi notaţia: $n\,! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$ ce reprezintă produsul primelor **n** numere naturale nenule.

Teoremă: Oricare ar fi $n \geqslant 1$, numărul natural $P_n = n\,!$.

ARANJAMENTE

Fie o mulţime **A** cu **n** elemente. Dacă $k \leqslant n$, atunci se pot forma diferite mulţimi ordonate cu câte k elemente, în care intră numai elemente ale mulţimii A.

De exemplu, dacă mulţimea $A = \{a ; b ; c\}$, cu elementele mulţimii **A** se pot forma următoarele mulţimi ordonate de câte două elemente: $(a ; b) ; (a ; c) ; (b ; a) ; (b ; c) ; (c ; a) ; \ (c ; b)$,

INSPECTORATUL SCOLARJUDEŢEAN DÂMBOVIŢA
Federația Națională a Asociațiilor de Părinți - Învățământ Preuniversitar

adică 6 mulţimi ordonate de căte două elemente.

Definiţie Dacă A este o mulţime cu n elemente, atunci submulţimile ordonate ale lui A, având fiecare câte k elemente cu $0 \leqslant k \leqslant n$, se numesc aranjamente de n luate câte k. Se observă că două aranjamente de n luate câte k se deosebesc prin 'natura' elementelor lor sau prin ordinea elementelor.

Numărul aranjamentelor de n elemente luate câte k se notează A_n^k şi se citeşte 'aranjamente de n luate câte k'.

Din exemplul anterior $A_3^2 = 6$. Se observă că $A_n^1 = n$. Într-adevăr, un element din cele n elemente poate fi ales în n moduri şi cu acest element ales se formează o singură mulţime ordonată.

Teoremă: Dacă $k, n \in \mathbb{N}$ cu $0 \leqslant k \leqslant n$ atunci, $A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1)$

Demonstraţie: Fie $0 < k < n$ şi se face inducţie după k. $P(k) \ : \ A_n^k = n(n-1)(n-2)....(n-k+1)$
$P(k+1) \ : \ A_n^{k+1} = n(n-1)...(n-k+1)(n-k).$ Pentru a repartiza oricare $k+1$ elemente luate din cele n date, pe $k+1$ locuri, se pot lua mai întâi k elemente şi aranja pe primele k locuri. Acest lucru se poate face în A_n^k moduri, adică în $n(n-1)...(n-k+1)$ moduri $\Rightarrow$ rămân $(n-k)$ elemente şi oricare din aceste elemente se poate pune pe al $(k+1)$-lea loc. Astfel, în fiecare din cele A_n^k moduri de aranjare a elementelor pe primele k locuri obţinem $(n-k)$ posibilităţi prin care al $(k+1)$-lea loc este ocupat de unul din cele $(n-k)$ elemente rămase $\Rightarrow$

$$A_n^{k+1} = (n-k)A_n^k \Rightarrow A_n^{k+1} = (n-k)(n-k+1)....(n-1)\cdot n$$

În anumite cazuri se aplica o formula mai adecvata pentru calculul numerelor A_n^k :

$$A_n^1 = n = \frac{n\cdot(n-1)\cdot...\cdot 2\cdot 1}{(n-2)\cdot...\cdot 2\cdot 1} = \frac{n\,!}{(n-1)\,!}$$

$$A_n^2 = n(n-1) = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot...\cdot 2\cdot 1}{(n-2)\cdot...\cdot 2\cdot 1} = \frac{n\,!}{(n-2)\,!}$$

....

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)....(n-k+1) =$$

$$= \frac{n(n-1)....(n-k+1)(n-k)\cdot...\cdot 2\cdot 1}{(n-k)\cdot....\cdot 2\cdot 1} = \frac{n\,!}{(n-k)\,!}$$

$$\Rightarrow A_n^k = \frac{n\,!}{(n-k)\,!}$$

Pentru $k = 0 \Rightarrow A_n^0 = \frac{n\,!}{n\,!} = 1$,ceea ce este adevărat deoarece orice mulţime conţine mulţimea vidă despre care s-a convenit că poate fi ordonată într-un singur mod. Pentru $k = n \Rightarrow A_n^n = n\,! \ = P_n$

COMBINĂRI

Fie mulţimea $A = \{a, b, c\}$. Vom scrie toate submulţimile mulţimii A (toate mulţimile ce pot fi formate cu elemente ale mulţimii A).

Aceste submulţimi sunt:

1) mulţimea vidă : $\varnothing$

2) submulţimile care au câte un element sunt $\{a\}\ ;\ \{b\}\ ;\ \{c\}$

3) submulţimile care au câte două elemente sunt $\{a\ ;\ b\}\ ;\ \{a\ ;\ c\}\ ;\ \{b\ ;\ c\}$

4) submulţimea cu trei elemente (mulţimea totală) este $\{a\ ;\ b\ ;\ c\}$.

$\Rightarrow$ mulţimea $A=\{a\ ;\ b\ ;\ c\}$ are submulţimi, dintre care: trei submulţimi cu câte un element, trei submulţimi cu câte două elemente, o submulţime cu trei elemente şi mulţimea vidă.

Generalizând, fiind dată o mulţime finită cu n elemente, atunci vrem să determinăm numărul submulţimilor sale cu k elemente.

Definiţie Dacă A este o mulţime cu n elemente, atunci submulţimile lui A având câte k elemente, $0 \leqslant k \leqslant n$, se numesc combinări de n elemente luate câte k şi se notează C_n^k.

Din exemplul anterior $\Rightarrow$ $C_3^0=1\ ;\ C_3^1=3\ ;\ C_3^2=3\ ;\ C_3^3=1.$

Suma submulţimilor mulţimii $A=\{a\ ;\ b\ ;\ c\}$ este $C_3^0+C_3^1+C_3^2+C_3^3=8=2^3$.

Vrem să determinăm o formulă pentru calculul combinărilor de n luate câte k.

Se observă că avem: $C_n^0=1$, deoarece fiecare mulţime A are doar o submulţime fără nici un element, adică mulţimea vidă.

$C_n^1=n$ deoarece pentru o mulţime $A=\{a_1, \dots, a_n\}$ cu n elemente numărul submulţimilor cu un element este $n : \{a_1\}\ ;\ \{a_2\}\ ;\ \dots\{a_n\}$.

Teoremă: Dacă $k, n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant k \leqslant n$, atunci $C_n^k=\dfrac{n\,!}{k\,!\,(n-k)\,!}=\dfrac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k\,!}$

Demonstraţie: Fie A o mulţime cu n elemente. Fie toate submulţimile lui A care au k elemente. Dacă ordonăm fiecare dintre aceste submulţimi în toate modurile posibile, obţinem toate submulţimile ordonate ale lui A, care au k elemente. Numărul acestor submulţimi este: A_n^k. Dar numărul tuturor submulţimilor lui A cu k elemente este este egal cu C_n^k şi fiecare dintre aceste submulţimi poate fi ordonată în P_k moduri $\Rightarrow A_n^k=C_n^k \cdot P_k \Rightarrow C_n^k=\dfrac{A_n^k}{P_k}$. Dar $A_n^k=\dfrac{n\,!}{(n-k)\,!}$ şi $P_k=k\,!$

$$\Rightarrow C_n^k=\frac{n\,!}{k\,!\,(n-k)\,!}=\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k\,!}$$

COMBINĂRI COMPLEMENTARE. NUMĂRUL TUTUROR COMBINĂRILOR SUBMULŢIMILOR UNEI MULŢIMI CU n ELEMENTE

Formula combinărilor complementare: Dacă $0 \leqslant k \leqslant n$ atunci este adevărată egalitatea: $C_n^k=C_n^{n-k}$.

Demonstrație. Din formula $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)![n-(n-k)]!} = C_n^{n-k}$

2. Pentru orice număr natural $n \geq 0$ este adevărată egalitatea:

$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$ ***(numărul submulţimilor unei mulţimi cu n elemente).***

Demonstratia formulei se realizeaza la binomul lui Newton.

Formula de recurenţă pentru calculul numărului de combinări Pentru orice $k, n \in \mathbb{N}$ cu $0 \leq k < n$ este adevărată egalitatea: $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$

Demonstraţie: Prin formula combinărilor $\Rightarrow C_{n-1}^k = \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} = \frac{(n-1)!\cdot(n-k)}{k!(n-k)!}$

$$C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{(n-1)!\cdot k}{k!(n-k)!} \quad C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!\cdot(n-k)}{k!(n-k)!} + \frac{(n-1)!\cdot k}{k!(n-k)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!}{k!(n-k)!}(n-k+k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k \Rightarrow \quad \Rightarrow C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

BINOMUL LUI NEWTON

Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Sunt cunoscute formulele:

$$(a+b)^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Se poate calcula fară dificultate:

$$(a+b)^4 = (a+b)^2 \cdot (a+b)^2 = \left(a^2 + 2ab + b^2\right) \cdot \quad \cdot \left(a^2 + 2ab + b^2\right) \Rightarrow$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^5 = (a+b)^2 \cdot (a+b)^3 = \left(a^2 + 2ab + b^2\right) \cdot \quad \cdot \left(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\right) \Rightarrow$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^2b + 10a^3b^2 + +10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Vom arăta că pentru orice număr natural $"n"$ este adevărată formula:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + ... + + C_n^k a^{n-k} b^k + ... + C_n^n b^n \quad (1)$$

care se numeşte <u>formula lui Newton.</u> Membrul din dreapta al egalităţii (1) se numeşte "dezvolatarea binomului la putere ". Se demonstrează egalitatea (1) prin inducţie .

Exemplu:

$$(a+b)^6 = C_6^0 a^6 + C_6^1 a^5 b + C_6^2 a^4 b^2 + + C_6^3 a^3 b^3 + C_6^4 a^2 b^4 + C_6^5 ab^5 + C_6^6 b^6$$

Deoarece : $C_6^0 = 1 = C_6^6$; $C_6^1 = \frac{6}{1} = 6$; $C_6^2 = \frac{6\cdot5}{1\cdot2} = 15$; $C_6^3 = \frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3} = 20$

; $C_6^4 = C_6^2 = 15$; $C_6^5 = C_6^1 = 6$ (sunt combinări complementare) $\Rightarrow$

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + +20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

Definitie : Dacă $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + ... + + C_n^k a^{n-k} b^k + ... + C_n^n b^n$

atunci C_n^0 ; C_n^1 ; .... ; C_n^k ; .....C_n^k se numesc coeficienţii binomiali şi sunt in număr de $"n+1"$.

Observaţii:

1) În dezvoltarea $(a+b)^n$, după formula lui Newton, sunt $"n+1"$ termeni.

2) În formula lui Newton exponenţii puterilor lui $"a"$ descresc de la n la 0 şi exponenţii puterilor lui b cresc de la 0 la n . Suma exponenţilor puterilor lui a şi b în orice termen al dezvoltării este egală cu n, adică egală cu exponentul puterii binomului.

3) Coeficienţii binomiali din dezvoltare egal depărtaţi de termenii extremi ai dezvoltării sunt egali între ei deoarece $C_n^m = C_n^{n-m}$ (combinări complementare).

4) Termenul $C_n^k a^{n-k} b^k$, adică al $(k+1)$-lea termen din binom, se numeşte termenul de rang $(k+1)$ şi se notează T_{k+1} .

Deci $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k, k = 0, 1, 2...n$.

Termenul T_{k+1} se numeşte "termenul general al dezvoltării ", deoarece dând valori lui k de la 0 la n se obţin toţi termenii dezvoltării.Formula termenului T_{k+1} prezinta diverse aplicatii in cadrul problemelor in care se aplica binomul lui Newton.Astfel se poate determina:

1.Un termen de rang dat ,fara a scrie toata dezvoltarea binomiala;
2.Un termen al dezvoltarii cu o anumita proprietate;
3.Termenul sau termenii din mijloc ai unei dezvoltari;
4.Termenii rationali sau irationali ai unei dezvoltari binomiale.

IDENTITĂŢI ÎN CALCULUL CU COMBINĂRI

Folosind formula lui Newton de dezvoltare a binomului:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + ... + + C_n^k a^{n-k} b^k + ... + C_n^n b^n \quad (1)$$

se pot deduce câteva identităţi în care intervin coeficienţii binomiali. În formula (1) se particularizează $a = b = 1 \Rightarrow (1+1)^n = C_n^0 1^n + C_n^1 1^{n-1} 1 + ... +$
$+ C_n^k 1^{n-k} 1^k + ... + C_n^n 1^n \Rightarrow \Rightarrow (2)\ 2^n = C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n$ ceea ce reprezintă:

Suma coeficienţilor binomiali ai dezvoltării este 2^n. În formula (1) se particularizează $a = 1$; $b = -1$. $(3)\ 0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + ... + (-1)^n C_n^n$

Se adună relaţiile (2) şi (3) membru cu membru $\Rightarrow 2^n = 2\left(C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + ...\right) \Rightarrow (4)\ 2^{n-1} = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + ... \Rightarrow$ Suma coeficienţilor binomiali ai termenilor de rang impar e 2^{n-1} .

Se scade din (2) relaţia (3) $\Rightarrow (5)\ 2^{n-1} = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + ... \Rightarrow$ Suma coeficienţilor binomiali ai termenilor de rang par este 2^{n-1} .

PROBABILITATE

1. Frecventa

Daca repetam o experienta de *n* ori in conditii identice, si obtinem de *a* ori evenimentul A, atunci numarul $f_n = a/n$ poarta numele de ***frecventa.*** Numarul *a* poate varia de la 0 la *n* inclusiv.

Evenimente egal posibile. Fie A si B doua evenimente referitoare la aceeasi experienta. Daca ,din motive de perfecta simetrie, putem afirma ca ambele evenimente au aceeasi sansa de a fi realizate, spunem ca evenimentele sunt *egal posibile*.

2. Probabilitate

Definitie. Pobabilitatea unui eveniment este egala cu raportul dintre numarul cazurilor favorabile care realizeaza evenimentul si numarul cazurilor egal posibile.

Asadar, vom spune ca probabilitatea evenimentului A este egala cu raportul dintre numarul *m* al cazurilor favorabile realizarii evenimentului A si numarul *n* al cazurilor egal posibile. Vom scrie $P(A) = \frac{m}{n}$

Exemplu. Avem o urna care contine 20 de bile numerotate cu 1, 2, 3, ... , 19, 20. Care este probabilitatea ca printr-o extractie sa obtinem o bila numerotata cu un nr. mai mic decât 6?

Notam cu A evenimentul caruia dorim sa-i calculam probabilitatea. Numarul cazurilor egal posibile este 20. Numarul cazurilor favorabile realizarii evenimentului A este 5. Aceste cazuri sunt: extragerea bilei 1, extragerea bilei 2, extragerea bilei 3, extragerea bilei 4 sau extragerea bilei 5. Atunci avem

$$P(A) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

Proprietati ale probabilitatilor Probabilitatea unui eveniment *A*, pe care o notam prin *P(A)*, are urmatoarele proprietati:

1. $0 \le P(A) \le 1$
2. $P(E) = 1$
3. $P(\emptyset) = 0$
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B), daca\ A \cap B = \emptyset$
5. $P(A) = 1 - P(A)$

Regula de adunare a probabilitatilor

Fie A si B doua evenimente incompatibile intre ele avand respectiv probabilitatile *p* ***si*** *q*. ***Probabilitatea ca să se întâmple cel puţin unul dintre ele este*** *p* + *q*.

Evenimente independente *Fie A şi B două evenimente. Dacă* $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ *evenimentele A si B sunt, prin definitie, independente.*

Exemplu. Consideram ca avem două zaruri: unul roşu si celalalt albastru.Fie *A* evenimentul ca zarul roşu să apară cu faţa 1 şi celălalt cu faţa 4. Sunt evenimentele A si B independente?

Evenimentele elementare sunt (*j*, *k*) , (*j* =1, 2, 3, 4, 5, 6; *k* =1, 2, 3, 4, 5, 6), unde *j* sunt nr. de puncte de pe faţa zarului roşu, iar k de pe faţa zarului albastru. Toate aceste evenimente sunt egal posibile.
Deci, avem 36 de cazuri posibile.

Avem un singur caz posibil pentru A ∩ B, adica (1,4). Deci $P(A \cap B)$ =1/36.

Pentru A avem 6 cazuri posibile (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6). Deci *P(A)* = 6/36 = 1/6.
Pentru B avem 6 cazuri favorabile: (1,5), (2,5), ... Deci *P(B)* = 6/36 = 1/6.

Relatia $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ este indeplinită. Atunci evenimentele *A* si *B* sunt independente.

EXEMPLE DE ITEMI SPECIFICI EXAMENULUI DE BACALAUREAT

ELEMENTE DE COMBINATORICA

1. Câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma cu elemente ale mulţimii {2,4,6,8} ?

2. Câte numere naturale de patru cifre distincte se pot forma cu cifre din mulţimea {1,3,5,7,9} ?

3. Să se rezolve ecuaţia $C_n^8 = C_n^{10}$,$n\in\mathbb{N}$, $n \geq 10$.
4. Să se arate că $C_{17}^3 > C_{17}^{15}$.
5. Să se determine $x\in\mathbb{N}$, $x \geq 2$, astfel încât $C_x^2 + A_x^2 = 30$.
6. Să se calculeze $C_{16}^0 + C_{16}^2 + C_{16}^4 + \cdots + C_{16}^{16}$.
7.Să se determine $n\in\mathbb{N}$, $n \geq 2$, astfel încât $3C_n^1 + 2C_n^2 = 8$.
8. Să se determine $x\in\mathbb{N}$, $x \geq 3$ ştiind că $C_x^{x-1} + C_{x-1}^{x-3} \leq 9$.
9. Să se arate că 11 divide numărul $C_{11}^1 + C_{11}^2 + \cdots + C_{11}^{10}$.
10.Într-o clasă sunt 22 de elevi, dintre care 12 sunt fete. Să se determine în câte moduri se poate alege un comitet reprezentativ al clasei format din 3 fete şi 2 băieţi.

BINOMUL LUI NEWTON

1. Să se determine $a > 0$ ştiind că termenul din mijloc al dezvoltării $(\sqrt[3]{a} + \frac{1}{\sqrt[4]{a}})^{12}$ este egal cu 1848.

2. Să se determine termenul care nu conţine pe x din dezvoltarea $(x^2 + \frac{1}{x})^9$.

3. Se consideră dezvoltarea $(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{y})^{49}$. Să se determine termenul care îi conţine pe x şi y la aceeaşi putere.
4. Să se determine termenul care nu-l conţine pe x , din dezvoltarea $(\sqrt[3]{x} + \frac{2}{\sqrt{x}})^{200}$,$x > 0$.

5. Să se determine numărul termenilor raţionali din dezvoltarea $(3 + \sqrt[3]{3})^{10}$.

7. Să se determine numărul termenilor raţionali din dezvoltarea binomului $(\sqrt{2} + 1)^5$.

8. Să se determine numărul termenilor raţionali ai dezvoltării $(\sqrt[4]{5} + 1)^{100}$.

9. Să se determine numărul termenilor iraţionali ai dezvoltării $(\sqrt{3} + 1)^9$.

10. Suma coeficienţilor binomiali ai dezvoltării $(2 - 5y)^n$ este egală cu 32. Să se determine termenul de rang patru.

MATEMATICA APLICATA. PROBABILITATI

1. Se consideră mulţimea $A = \{1,2,3,...,10\}$. Să se determine numărul submulţimilor cu trei elemente ale mulţimii A, care conţin elementul 1.
2. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr $\overline{ab}$ din mulţimea numerelor naturale de două cifre, să avem $a \neq b$.
3. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie pătrat perfect.

4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă exact două cifre egale.
5. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr ab din mulţimea numerelor naturale de două cifre, să avem $a + b = 4$.
6. Care este probabilitatea ca, alegând un număr k din mulţimea $\{0,1,2,...,7\}$, numărul C_k^7 să fie prim.
7. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă toate cifrele pare.
8. Să se determine probabilitatea ca, alegând un element din mulţimea $\{1,2,3,...,40\}$, numărul $2^{n+2} \cdot 6^n$ să fie pătrat perfect.
9. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $\{10,11,12,...,40\}$, suma cifrelor lui să fie divizibilă cu 3.
10. Fie mulţimea $M = \{1,2,3,4,5,6\}$. Să se determine probabilitatea ca, alegând una dintre submulţimile mulţimii M , aceasta să aibă 2 elemente.
11. Într-o urnă sunt 49 de bile, inscripţionate cu numerele de la 1 la 49. Să se calculeze probabilitatea ca, extrăgând o bilă din urnă, aceasta să aibă scris pe ea un pătrat perfect.