Proiect cofinanţat din Fondul Social European prin Programul Operaţional Sectorial Dezvoltarea Resurselor Umane 2007-2013
Axa prioritară 1 „Educaţia şi formarea profesională în sprijinul creşterii economice şi dezvoltării societăţii bazate pe cunoaştere”
Domeniul major de intervenţie 1.1 „Acces la educaţie şi formare profesională iniţială de calitate”
Titlul proiectului: „TEEN PERFORM - Program inovator de îmbunătăţire a rezultatelor şcolare în învăţământul liceal”
Contract număr: POSDRU/153/1.1/S/136612
Beneficiar: Inspectoratul Şcolar Judeţean Suceava

Disciplina MATEMATICĂ
FIŞĂ DE LUCRU

Tema/Unitatea: *Vectori în plan. Geometrie analitică*

Expert educație: prof. Moisuc Niculina – Mihaela, Colegiul Tehnic Rădăuți, Suceava

Breviar teoretic

Vectori în plan

I. Segmente orientate. Noțiunea de vector

O pereche ordonată (A,B)de puncte ale planului determină în mod unic:

a). un segment $[AB]$ cu lungimea $l=d(A,B)$;
b). o direcţie dată de dreapta AB ;
c). un sens dat de semidreapta $(AB$.

Definiţie: O pereche ordonată de puncte (A,B) din plan se numeşte segment orientat (vector legat).**Notaţie:** $\overline{AB}$.

Observaţii:

1. Punctul A se numeşte originea (punctul de aplicaţie) iar punctul B extremitatea (vâful) segmentului orientat $\overline{AB}$;

2. Lungimea segmentului $[AB]$ se numeşte modulul segmentului orientat $\overline{AB}$; **Notaţie:** $|\overline{AB}|$.

3. Dreapta AB se numeşte suportul segmentului orientat $\overline{AB}$ iar direcţia ei se numeşte direcţia segmentului orientat $\overline{AB}$.

Definiţie: Se numesc <u>segmente echipolente</u> două segmente orientate care au aceeaşi direcţie, acelaşi modul şi acelaşi sens. **Notaţie:** $\overline{AB}\sim\overline{CD}$.

Definiţie: Mulţimea tuturor segmentelor orientate echipolente cu un segment orientat dat $\overline{AB}$ se numeşte <u>vector</u> (vector liber). **Notaţie:** $\overrightarrow{AB}$ **.**

Observaţii:

1. Orice segment orientat din această mulţime se numeşte reprezentant al vectorului $\overrightarrow{AB}$;

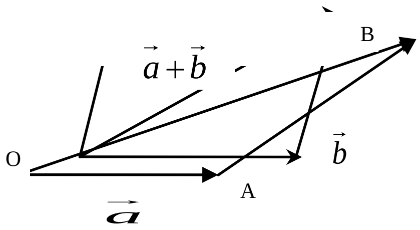
2. Vectorii liberi se pot nota şi cu litere mici $\vec{a},\vec{b},\vec{u},\vec{v},\ldots$.

Definiţie: Doi vectori se numesc <u>vectori egali</u> dacă au aceeaşi direcţie, acelaşi sens şi acelaşi modul.
Definiţie: Doi vectori se numesc <u>vectori coliniari</u> dacă au aceeaşi direcţie.
Definiţie: Doi vectori se numesc <u>vectori opuşi</u> dacă au acelaşi modul, aceeaşi direcţie şi sensuri diferite.

Observaţii:

1.Vectorul nul este vectorul care are modulul 0 iar direcţia şi sensul sunt nedeterminate;
2.Vectorul unitar (versor, vector unitate) este vectorul care are modulul 1.

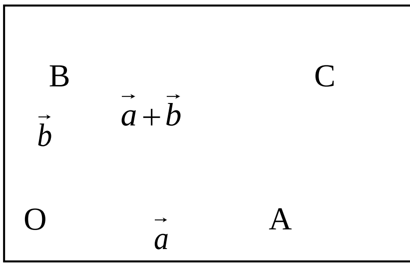
Regula triunghiului



II. Adunarea vectorilor

Definiţie: Fie $\vec{a},\vec{b}$ doi vectori şi $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$ reprezentanţi ai acestora.Se numeşte $\vec{b}$ suma celor doi vectori vectorul $\vec{s}$ care are ca reprezentant $\overrightarrow{OB}$.

Regula paralelogramului



1.Regula triunghiului se extinde la adunarea mai multor vectori şi se numeşte regula poligonului:
$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+...+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{A_1A_n}$

2. Dacă $A_1=A_n$ atunci $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+...+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\vec{0}$.

Proprietăţile adunării vectorilor:

Oricare ar fi vectorii $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ au loc: **1.** $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$ (comutativitatea);

2. $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$ ($\vec{0}$ este element neutru); **3.** $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ (asociativitatea);

4. $\vec{u}+(-\vec{u})=(-\vec{u})+\vec{u}=\vec{0}$ ($-\vec{u}$ este vectorul opus lui $\vec{u}$).

Notaţie: $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+\left(\overrightarrow{-v}\right)$,oricare ar fi vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$.

III. Înmulţirea cu scalari a vectorilor

Definiţie: Fie $\vec{v}$ un vector şi $\alpha\in\mathbb{R}^*$. Vectorul $\alpha\vec{v}$ este vectorul care are:

- aceeaşi direcţie cu $\vec{v}$;
- acelaşi sens cu $\vec{v}$ daca $\alpha>0$ şi sens opus cu $\vec{v}$ dacă $\alpha<0$;
- modulul egal cu $|\alpha||\vec{v}|$.

Proprietăţi ale înmulţirii cu scalari:

Oricare ar fi vectorii $\vec{u},\vec{v}$ şi $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ au loc:

1. $\alpha\vec{v}=\vec{0}\Leftrightarrow\alpha=0$ sau $\vec{v}=\vec{0}$;

2. $1\cdot\vec{v}=\vec{v}$; **3.** $(\alpha\beta)\vec{v}=\alpha(\beta\vec{v})$;

4. $(\alpha+\beta)\vec{v}=\alpha\vec{v}+\beta\vec{v}$; **5.** $\alpha(\vec{u}+\vec{v})=\alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}$.

IV. Coliniaritatea a doi vectori

Teoremă: Vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ sunt vectori coliniari dacă şi numai dacă există $\alpha\in\mathbb{R}$ astfel încât $\vec{v}=\alpha\vec{u}$.

Observaţii:

1. Vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ sunt vectori coliniari dacă şi numai dacă există $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^*$ astfel încât $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}=\vec{0}$;

2. Dacă $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ sunt vectori necoliniari, atunci din orice relaţie de forma $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}=\vec{0}\Rightarrow\alpha=\beta=0$;

3. Punctele A,B,C sunt puncte coliniare dacă şi numai dacă există $\alpha\in\mathbb{R}^*$ încât $\overrightarrow{AB}=\alpha\overrightarrow{BC}$.

V. Reper cartezian. Coordonatele unui vector

Definiţie: Fie o dreaptă d în plan. Se numeşte reper cartezian pe dreapta d o pereche $\left(O,\vec{i}\right)$ formată dintr-un punct O de pe dreaptă şi un versor $\vec{i}$ al direcţiei acestei drepte. **Notaţie:** Ox, $\left(O,\vec{i}\right)$.

Observaţii:

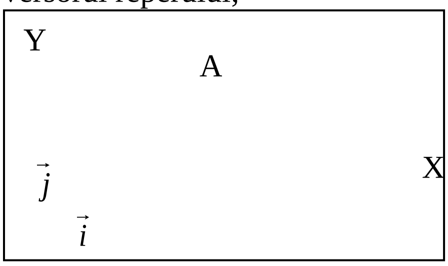
1. d se numeşte axă (axa de coordonate), O se numeşte originea iar $\vec{i}$ versorul reperului;

2. Dacă $M(x)\in d$ atunci $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}$;

3. x se numeşte abscisa (coordonata) vectorului $\overrightarrow{OM}$.

Definiţie: Fie Ox şi Oy două axe ortogonale în plan.

Se numeşte reper cartezian în plan tripletul $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$,



unde $\vec{i}$ și $\vec{j}$ sunt versorii celor două axe. **Notație:** xOy, $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Observații:

1. O se numește originea reperului, Ox se numește axa absciselor, iar Oy axa ordonatelor;

2. Dacă $A(x,y)$ este un punct din plan atunci $\overrightarrow{OA}=x\vec{i}+y\vec{j}$;

3. (x,y) se numesc coordonatele vectorului $\overrightarrow{OA}$. **Notație:** $\overrightarrow{OA}\,(x,y)$.

Teoremă (descompunerea vectorului $\overrightarrow{AB}$ după versorii $\vec{i}$ și $\vec{j}$): Dacă $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ sunt puncte din plan atunci $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}$.

Proprietăți:

Dacă $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3)$ sunt puncte necoliniare din plan atunci**:**

1. $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$;

2. Dacă M este mijlocul segmentului $[AB]$ atunci $M\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$;

3. Dacă G este centrul de greutate al ΔABC atunci $G\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{2},\dfrac{y_1+y_2+y_3}{2}\right)$.

Operații cu vectori:

Dacă $\vec{u}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}$ și $\vec{v}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}$ atunci au loc:

1. $\vec{u}+\vec{v}=(x_1+x_2)\vec{i}+(y_1+y_2)\vec{j}$;

2. $\vec{u}-\vec{v}=(x_1-x_2)\vec{i}+(y_1-y_2)\vec{j}$;

3. $\alpha\vec{u}=\alpha x_1\vec{i}+\alpha y_1\vec{j},\alpha\in\mathbb{R}$;

4. $\left|\vec{u}\right|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$.

Teoremă: Vectorii $\vec{u}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}$ și $\vec{v}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}$ sunt vectori coliniari dacă și numai dacă $\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}$, $x_2\neq 0, y_2\neq 0$.

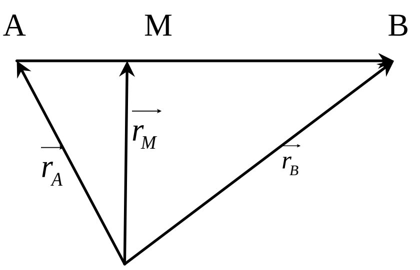
VI. Vectorul de poziție al unui punct în plan

Definiție: Fie O un punct în plan. Vectorul $\overrightarrow{OA}$ se numește vectorul de poziție al punctului A și se notează $\overrightarrow{r_A}$.

Teoremă: Dacă A,B sunt puncte distincte din plan atunci $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{r_B}-\overrightarrow{r_A}$.

Teoremă: Dacă A,B sunt puncte distincte din plan și M este mijlocul segmentului *[AB]* atunci $\overrightarrow{r_M}=\dfrac{\overrightarrow{r_A}+\overrightarrow{r_B}}{2}$.

Teoremă: Fie A și B puncte distincte din plan și $M\in[AB]$ astfel încât $\dfrac{AM}{MB}=k,k>0$ atunci $\overrightarrow{r_M}=\dfrac{\overrightarrow{r_A}+k\overrightarrow{r_B}}{1+k}$.



Teoremă: Dacă I este centrul cercului înscris în ΔABC atunci

$$\overrightarrow{r_I}=\frac{a\overrightarrow{r_A}+b\overrightarrow{r_B}+c\overrightarrow{r_C}}{a+b+c}.$$

Teoremă: Dacă I este centrul cercului înscris în ΔABC atunci

$$\overrightarrow{r_I}=\frac{a\overrightarrow{r_A}+b\overrightarrow{r_B}+c\overrightarrow{r_C}}{a+b+c}.$$

VII. Centre de greutate

Definiție: Fie $A_1,A_2,...,A_n,n\in\mathbb{N}^*$, puncte din plan. Se numește centru de greutate al sistemului de puncte $A_1,A_2,...,A_n$, un punct G din plan cu proprietatea că $\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GA_2}+...+\overrightarrow{GA_n}=\vec{0}$.

Teoremă (de unicitate şi existenţă): Un sistem $A_1, A_2, ..., A_n, n \in \mathbb{N}^*$, de puncte din plan admite un singur centru de greutate.

Teoremă (relaţia lui Leibniz): Dacă $A_1, A_2, ..., A_n, n \in \mathbb{N}^*$, este un sistem de puncte din plan, G centrul său de greutate şi M un punct oarecare din plan atunci $\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + ... + \overrightarrow{MA_n} = n\overrightarrow{MG}$.

Teoremă: Dacă G este centrul de greutate al ΔABC atunci $\vec{r}_G = \dfrac{\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C}{3}$.

Teoremă: Dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC atunci $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Teoremă: Dacă G este centrul de greutate al ΔABC atunci oricare ar fi O un punct din plan are loc:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

Teoremă (Pappus): Fie ΔABC. Dacă punctele $M \in (AB), N \in (BC), P \in (CA)$ împart aceste segmente în acelaşi raport atunci ΔABC şi ΔMNP au acelaşi centru de greutate.

VIII. Alte teoreme remarcabile în geometria plană

Teoremă (Sylvester): Dacă O şi H sunt centrul cercului circumscris, respectiv ortocentrul ΔABC atunci: $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

Consecinţa 1: Într-un triunghi centrul cercului circumscris (O), centrul de greutate (G) şi ortocentrul (H) sunt puncte coliniare.

Observaţie: Dreapta pe care se află punctele O, G, H se numeşte dreapta lui Euler.

Consecinţa 2: În orice triunghi**,** cu notaţiile uzuale, au loc relaţiile:

a). $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 3\overrightarrow{HG}$; **b).** $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$.

Consecinţa 3 (relaţia lui Euler): Fie ΔABC şi O' mijlocul segmentului $[OH]$. Atunci are loc relaţia

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OO'}.$$

Observaţie: Cercul care trece prin mijloacele laturilor unui triunghi, prin picioarele înălţimilor triunghiului şi prin mijloacele segmentelor care unesc vârfurile triunghiului cu ortocentrul acestuia se numeşte cercul lui Euler (cercul celor nouă puncte).

Teoremă (Menelaus): Fie triunghiul ABC şi A', B', C' trei puncte astfel încât $A' \in BC, B' \in (AC), C' \in (AB)$. Dacă A', B', C' sunt puncte coliniare, atunci are loc relaţia:

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1.$$

Teoremă (Reciproca teoremei lui Menelaus): Fie triunghiul ABC şi $A' \in BC, B' \in AC, C' \in AB$ astfel încât două dintre punctele A', B', C' sunt situate pe două laturi ale triunghiului, iar al treilea punct este situat pe prelungirea celei de-a treia laturi sau toate punctele A', B', C' sunt situate pe prelungirile laturilor triunghiului. Dacă are loc relaţia $\dfrac{A'B}{A'C} \cdot \dfrac{B'C}{B'A} \cdot \dfrac{C'A}{C'B} = 1$, atunci punctele A', B', C' sunt puncte coliniare.

Teoremă (Ceva): Fie triunghiul ABC şi A', B', C' trei puncte astfel încât $A' \in (BC), B' \in (CA), C' \in (AB)$. Dacă dreptele AA', BB', CC' sunt concurente, atunci are loc relaţia

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1.$$

Teoremă (Reciproca teoremei lui Ceva): Fie triunghiul ABC şi A', B', C' trei puncte astfel încât

$A^{'} \in (BC), B^{'} \in (CA), C^{'} \in (AB)$. Dacă are loc relaţia $\frac{A^{'}B}{A^{'}C} \cdot \frac{B^{'}C}{B^{'}A} \cdot \frac{C^{'}A}{C^{'}B} = 1$, atunci dreptele $AA^{'}, BB^{'}, CC^{'}$ sunt concurente.

Teoremă (Van Aubel): Fie triunghiul ABC şi punctele $A^{'} \in (BC), C \in (AC^{'}), B \in (AB^{'})$. Dacă dreptele $AA^{'}, CB^{'}, BC^{'}$ sunt concurente într-un punct P, atunci are loc relaţia $\frac{B^{'}A}{B^{'}C} + \frac{C^{'}A}{C^{'}B} = \frac{PA}{PA^{'}}$.

IX. Produsul scalar a doi vectori

Definiţie: Fie $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ vectori. Se numeşte produs scalar al vectorilor $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ numărul real $|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$.

Notaţie: $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$.

Teoremă (exprimarea în coordonate a produsului scalar): Dacă $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ şi $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ atunci $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2$.

Observaţie: $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1, \vec{j} \cdot \vec{j} = 1, \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$.

Teoremă: Fie $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ vectori. $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0$.

Proprietăţi: Fie vectorii $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ şi $m \in \mathbb{R}$. Atunci au loc:

1. $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$; **2.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (comutativitate);

3. $m(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (m\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (m\vec{v})$; **4.** $\vec{u} \cdot \vec{v} \le |\vec{u}||\vec{v}|$.

5. $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$ pentru $\cos\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}) > 0$ şi $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$ pentru $\cos\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}) < 0$;

6. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ (distributivitatea faţă de adunarea vectorilor);

Observaţie:

$$\cos\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}.$$

Elemente de geometrie analitică

1. Distanţa dintre două puncte $A(x_1, y_1)$ şi $B(x_2, y_2)$: $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

2. Panta dreptei AB: $m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, x_2 \ne x_1$

3. Coordonatele mijlocului M **al segmentului** $[AB]$: $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$, $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$.

4. Coordonatele punctului N **care împarte segmentul** $[AB]$ **în raportul** k:

$$x_N = \frac{x_1 + kx_2}{1 + k}, \quad y_N = \frac{y_1 + ky_2}{1 + k}.$$

5. Coordonatele ortocentrului G **al** ΔABC **unde** $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$:

$$x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \qquad y_G = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

6. Ecuaţia dreptei determinată de un punct şi o direcţie: Fie $M_0(x_0, y_0)$ şi vectorul $\vec{v}(a, b)$ atunci $d : \vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{v}, t \in \mathbb{R}$, unde $\vec{r_0}$ vectorul de poziţie al punctului M_0, iar $\vec{r}$ vectorul de poziţie al punctului $M \in d$.

7. Ecuaţii parametrice ale dreptei : $d:\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \end{cases}, t\in\mathbb{R}.$

8. Ecuaţia carteziană a dreptei : $d:\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b},\ \ a\neq 0$ şi $b\neq 0.$

9. Ecuaţia generală a dreptei : $d: ax+by+c=0,\ a\neq 0$ sau $b\neq 0,$ unde $m=-\dfrac{a}{b}$ panta dreptei d $(b\neq 0)$.

10. Ecuaţia explicită a dreptei : $d: y=mx+n,$ unde m este panta dreptei şi n este ordonata la origine.

11. Ecuaţiile dreptelor paralele cu axele de coordonate : $d: x=a,$ dreaptă verticală , $d: y=b,$ dreaptă orizontală.

12. Ecuaţia dreptei prin tăieturi : $d:\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1,\ a\neq 0$ şi $b\neq 0$ unde $A(a,0)$ şi $B(0,b)$ reprezintă punctele de intersecţie ale dreptei cu axele de coordonate.

13. Ecuaţia dreptei determinate de punctul $M_0(x_0,y_0)$ **şi panta** m: $d: y-y_0=m(x-x_0).$

14. Ecuaţia dreptei determinate de două puncte distincte $A(x_1,y_1)$ **şi** $B(x_2,y_2)$:

$$d:\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1},\ \ x_1\neq x_2 \text{ și } y_1\neq y_2 \qquad \text{SAU} \qquad \begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix}=0.$$

15. Unghiul a două drepte în plan. Fie $d_1: a_1x+b_1y+c_1=0$ şi $d_2: a_2x+b_2y+c_2=0$. Atunci unghiul dreptelor este unghiul format de vectorii lor directori şi este determinat de relaţia:

$$\cos\theta=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2}}.$$

16. Poziţia relativă a două drepte în plan. Dreptele $d_1: a_1x+b_1y+c_1=0$ şi $d_2: a_2x+b_2y+c_2=0$ sunt :

a) paralele $d_1\parallel d_2 \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}\neq\dfrac{c_1}{c_2}\Leftrightarrow m_1=m_2$. **b)** confundate $d_1=d_2\Leftrightarrow\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$.

c) concurente $d_1\cap d_2=\{A\}\Leftrightarrow\dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$. **d)** perpendiculare $d_1\perp d_2\Leftrightarrow a_1a_2+b_1b_2=0\Leftrightarrow m_1\cdot m_2=-1.$

Condiţia de paralelism: $d_1\parallel d_2\Leftrightarrow m_1=m_2$. **Condiţia de perpendicularitate**: $d_1\perp d_2\Leftrightarrow m_1\cdot m_2=-1.$

17. Distanţa de la punctul $M_0(x_0,y_0)$ **la dreapta** $h: ax+by+c=0$: $d(M_0,h)=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$

18. Aria triunghiului cu vârfurile $A(x_1,y_1),\ B(x_2,y_2),\ C(x_3,y_3)$: $\mathcal{A}_{[\Delta ABC]}=\dfrac{BC\cdot d(A,BC)}{2}.$

SAU $\mathcal{A}_{[\Delta ABC]}=\dfrac{1}{2}\cdot|\Delta|,$ unde $\Delta=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$

19. Condiţia de colinianitate a punctelor $A(x_1,y_1),\ B(x_2,y_2),\ C(x_3,y_3)$:

$$A \in BC \Leftrightarrow \frac{y_1 - y_2}{y_3 - y_2} = \frac{x_1 - x_2}{x_3 - x_2},\ x_3 \neq x_2,\ y_3 \neq y_2 \qquad \text{SAU} \qquad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

20.CERCUL

20.1 Ecuaţia cercului este: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, unde $C(a,b)$ este centrul cercului**,** iar $r \in (0,+\infty)$ este raza cercului

20.2. Dacă $C(a,b) \equiv O(0,0)$ ecuaţia cercului este: $x^2 + y^2 = r^2$.

20.3. Ecuaţia generală a cercului este: $x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$, unde $a = -\frac{m}{2}, b = -\frac{n}{2}$, $r = \sqrt{a^2 + b^2 - p}$.

❖

Tipuri de itemi
(nivel : tehnologic-T, științele naturii-Ș, matematică informatică-M)

T.1. Fie triunghiul ABC și M mijlocul laturii $[BC]$. Să se arate că $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

T.2. În triunghiul ABC punctele M, N, P sunt mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$, $[AC]$. Să se arate că $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AN}$.

T.3. Să se demonstreze că în patrulaterul $ABCD$ are loc relația $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

T.4. Fie triunghiul ABC și M, N, P sunt mijloacele laturilor $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$, iar O un punct în plan. Să se arate că $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$.

T.5. Se consideră pătratul $ABCD$ și O centrul său. Să se calculeze $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$.

T.6. În triunghiul ABC se consideră punctele D și E astfel încât $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{BC}$. Să se arate că dreptele BC și DE sunt paralele.

T.7. Fie triunghiul ABC și $M \in (BC)$ astfel încât $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BM}$. Să se arate că $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

T.8. Pe laturile (AB) și (AC) ale triunghiului ABC se iau punctele M și N astfel încât $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MB}$ și $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$. Să se arate că vectorii $\overrightarrow{MN}$ și $\overrightarrow{BC}$ sunt coliniari.

T.9. În reperul $(O,\vec{i},\vec{j})$ se consideră vectorii $\vec{u} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$ și $\vec{v} = 5\vec{i} - \vec{j}$. Să se determine coordonatele vectorului $5\vec{u} + 3\vec{v}$.

T.10. În reperul cartezian xOy se dau vectorii $\overrightarrow{OA}(2,-3)$ și $\overrightarrow{OB}(1,-2)$. Să se determine numerele reale α, β pentru care vectorul $3\overrightarrow{OA} - 5\overrightarrow{OB}$ are coordonatele (α, β).

T.11. Să se determine $a \in R$ știind că vectorii $\vec{u} = 4\vec{i} + (a+3)\vec{j}$ și $\vec{v} = (a-1)\vec{i} + 3\vec{j}$ sunt coliniari .

T.12. Să se determine $m \in R$ astfel încât vectorii $\vec{u} = (m-4)\vec{i} + (2m-3)\vec{j}$ și $\vec{v} = (m+3)\vec{i} + (2m+1)\vec{j}$ să aibă același modul.

T.13. Să se determine $m \in R$ astfel încât punctele $A(3,3)$, $B(2,4)$, $C(2m,1-m)$ să fie coliniare.

T.14. Fie $\vec{r_A} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{r_B} = \vec{i} + 3\vec{j}$ și $\vec{r_C} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ vectorii de poziție ai vârfurilor triunghiului ABC . Să se determine vectorul de poziție al centrului de greutate al triunghiului.

T.15. Se consideră punctele $A(m-1, m)$, $B(8,-5)$, $C(m-3, n+1)$. Să se determine numerele reale m, n astfel încât vectorul de poziție al centrului de greutate al triunghiului ABC să fie vectorul nul.

T.16. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,-1)$ și $B(-2,2)$. Să se determine distanța dintre A și B.

T.17. Se consideră punctele $A(2,m)$, $B(-m,-2)$. Să se determine $m \in R$ astfel încât $AB = 4\sqrt{2}.$.

T.18. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,a)$, $B(-1,2)$ și $C(4,5)$, unde $a \in R$. Să se determine valorile lui a pentru care triunghiul este dreptunghic în A.

T.19. Să se determine $a,b \in R$ știind că dreapta de ecuație $x + y - 5 = 0$ trece prin punctele $A(a,b)$ și $B(a-1,4)$.

T.20. Să se determine distanța de la punctul $O(0,0)$ la punctul de intersecție al dreptelor $d_1 : 2x - y - 2 = 0$ și $d_2 : x + 3y - 8 = 0$.

❖

Ș.1. Fie triunghiul ABC. Să se determine $k \in Z$ astfel încât $3\overrightarrow{BC} + 3\overrightarrow{CA} = k\overrightarrow{AB}$.

Ș.2. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC și $GM \parallel BC$, $M \in (AC)$. Să se determine $k \in R$ astfel încât $\overrightarrow{GM} = k\overrightarrow{BC}$.

Ș.3. Se consideră punctele $A(2,2)$, $B(-2,-4)$, $C(6,0)$ și $M \in [BC]$ astfel încât $\frac{MB}{BC} = \frac{3}{4}$. Să se determine vectorul $\overrightarrow{AM}$.

Ș.4. Fie triunghiul ABC și punctele $M \in (AB)$ și $N \in (AC)$ astfel încât vectorii $\overrightarrow{MN}$ și $\overrightarrow{BC}$ sunt coliniari. Dacă $AM = 4$, $BM = m$, $AN = m^2$ și $CN = 16$, să se determine $m \in N^*$.

Ș.5. Să se determine coordonatele simetricului punctului A față de mijlocul segmentului $[BC]$ dacă $A(0,4)$, $B(0,2)$, $C(3,2)$.

Ș.6. Se consideră punctele $A(-6,-3)$, $B(6,9)$, $C(0,-2)$. Să se determine coordonatele vectorului $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}$.

Ș.7. Să se calculeze $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CD}\right|$ în cazul $A(-4,5)$, $B(4,2)$, $C(0,2)$, $D(0,6)$.

Ș.8. Să se determine $m \in R$ pentru care dreptele $d_1 : -2x - my + 3 = 0$ și $d_2 : mx + y - 5 = 0$ sunt paralele.

Ș.9. Se consideră în plan punctele $A(1,1)$, $B(-2,-1)$, $C(0,-1)$, $D(3,1)$. Să se verifice că dreptele AB și CD sunt paralele.

Ș.10. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,-2)$, $B(1,2)$ și $C(2,0)$. Să se determine coordonatele punctului D astfel încât patrulaterul $ABCD$ să fie paralelogram.

Ș.11. Să se determine $m \in R$ pentru care punctele să fie coliniare :

a) $A(2,5)$, $B(1,5)$, $C(3,m)$; b) $A(2,3)$, $B(-1, m+2)$, $C(3,m)$.

Ș.12. Să se determine ecuația medianei duse din vârful C al triunghiului ABC în cazurile :

a) $A(1,2)$, $B(5,6)$, $C(-1,1)$; b) $A(2,3)$, $B(1,2)$, $C(3,-1)$

Ș.13. Să se determine lungimea înălțimii duse din vârful O al triunghiului MON, unde $M(4,0)$, $N(0,3)$ și

$O(0,0)$

Ș.14. Să se determine coordonatele vârfurilor triunghiului ABC știind că suporturile laturilor triunghiului sunt dreptele de ecuații $d_1: x-2y+2=0$, $d_2: 4x-y-13=0$ și $d_3: 2x+3y-3=0$.

Ș.15. O dreaptă are panta $m=3$ și conține punctul $A(-1,-1)$. Să se determine abscisa punctului P de pe dreaptă care are ordonata egală cu -7.

❖

M.1. Arătați că unghiul vectorilor $\vec{u}=\vec{i}-3\vec{j}$ și $\vec{v}=2\vec{i}+\vec{j}$ este obtuz.

M.2. Punctele A, B, C, D verifică relația $3\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$. Arătați că B, C, D sunt coliniare .

M.3. Calculați distanța de la punctul $A(2,2)$ la dreapta determinate de punctele $B(1,0)$ și $C(0,1)$.

M.4. Scrieți ecuația dreptei care conține punctul $M(3,2)$ și este perpendicular pe dreapta $d: x+2y+5=0$.

M.5. În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $A(-2,3)$ și $B(0,1)$. Determinați distanța de la punctul $M(1,5)$ la mediatoarea segmentului $[AB]$.

M.6. Determinați $a \in R$ pentru care distanța dintre dreptele $d_1: x+y+2015=0$ și $d_2: x+y+a=0$ să fie egală cu 2 .

M.7. Determinați $a \in R$ pentru care dreptele distincte $d_1: 3x+4y+2=0$, $d_2: 3x+4y=0$ și $d_3: 3x+4y+a=0$ sunt echidistante .

M.8. Determinați $a \in R$ pentru care dreptele $d_1: y=x$, $d_2: y=2x+1$ și $d_3: x+ay+1=0$ sunt concurente.

M.9. Determinați ecuația dreptei d_1 știind că dreptele d_1 și $d_2: x+2y+4=0$ sunt simetrice față de axa Ox .

M.10. Să se determine $a+b$ știind că dreptele $d_1: x+ay+2=0$ și $d_2: y=-2x+b$ coincid .

M.11. Fie punctele $A(-1,2)$, $B(-4,6)$ și $C(3,\text{-}1)$. Aflați lungimea bisectoarei din A a triunghiului ABC .

M.12. Fie $A(1,2)$ și $B(3,-1)$. Determinați ecuațiile dreptelor care trec prin A și sunt situate la distanța 2 de B .

M.13. Fie punctele $A(1,2)$ și $G(3,4)$. Dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC, determinați coordonatele mijlocului laturei BC .

M.14. Fie punctele $A(-1,3)$, $B(1,-1)$ și $C(a,b)$, unde $a,b \in Z$.

a) Arătați că , dacă $2a+b \neq 1$, atunci punctele A, B și C sunt necoliniare .

b) Arătați că dacă b este număr par, atunci aria triunghiului ABC este un număr natural impar .

M.15. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A_n\left(\log_2\left(\frac{1}{2}\right)^n, \log_3 9^n\right)$ și $B_n(\text{-}n,\ 2n)$, $n \in N^*$.

a) Să se determine ecuația dreptei B_1 și B_2 .

b) Să se arate că $A_n = B_n$, oricare ar fi $n \in N^*$.

c) Să se demonstreze că pentru orice $n \in N^*$, punctul A_n aparține dreptei A_1A_2.