Proiect cofinanţat din Fondul Social European prin Programul Operaţional Sectorial Dezvoltarea Resurselor Umane 2007-2013
Axa prioritară 1 „Educaţia şi formarea profesională în sprijinul creşterii economice şi dezvoltării societăţii bazate pe cunoaştere”
Domeniul major de intervenţie 1.1 „Acces la educaţie şi formare profesională iniţială de calitate”
Titlul proiectului: „TEEN PERFORM - Program inovator de îmbunătăţire a rezultatelor şcolare în învăţământul liceal”
Contract număr: POSDRU/153/1.1/S/136612
Beneficiar: Inspectoratul Şcolar Judeţean Suceava

Disciplina MATEMATICĂ
FIŞĂ DE LUCRU

Tema/Unitatea: Elemente de trigonometrie şi aplicaţii geometrie

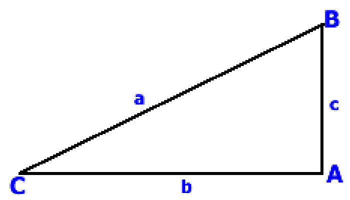
Expert educaţie: Prof. Alexe Iulian, Liceul Tehnologic “Iordache Golescu” , Găeşti

BREVIAR TEORETIC

Formule trigonometrice Trigonometrie. Elemente generale

Definiții

Într-un triunghi dreptunghic, considerând măsura unui unghi ascuțit numim:



sinusul = cateta opusă / ipotenuză
cosinusul = cateta alaturată / ipotenuză
tangenta = cateta opusă / cateta alaturată
cotangenta = cateta alaturată / cateta opusă

Sinusul, cosinusul, tangenta și cotangenta se numesc **funcții trigonometrice** și se notează cu ***sin, cos, tg,*** si ***ctg.***

Fiind dat un triunghi ABC dreptunghic în A, sunt adevarate urmatoarele relaţii:

$\sin^2 B + \cos^2 B = 1$ *formula fundamentală a trigonometriei*

$$tgB = \frac{\sin B}{\cos B} \qquad ctgB = \frac{\cos B}{\sin B} \qquad ctgB = \frac{1}{tgB}$$

$$\sin(90^0 - C) = \cos C$$

$$\cos(90^0 - C) = \sin C \qquad tg(90^0 - C) = ctgC$$

Cele mai cunoscute valori ale funcțiilor trigonometrice

u	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
sin u	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos u	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg u	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞
ctg u	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Pentru triunghiul alăturat avem formulele:

$$1+tg^2 B = 1+\frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2+b^2}{c^2} = \frac{a^2}{c^2} = \frac{1}{\cos^2 B}$$

$$1+tg^2 B = \frac{1}{\cos^2 B}$$

$$1+ctg^2 B = \frac{1}{\sin^2 B}$$

NOU!!! Acum poti calcula usor ***sinusul***, ***cosinusul***, ***tangenta*** si ***cotangenta..***

Relaţii metrice în triunghiul dreptunghic

În triunghiul dreptunghic ABC cu m(A) = 90° folosim notaţiile cunoscute: AB = *c*, AC = *b*, BC = *a*;

r = raza cercului circumscris triunghiului; l_a = lungimea bisectoarei dusă din vârful A;

m_a = lungimea medianei din A; r_a = lungimea razei cercului exînscris corespunzător laturii BC;

$p = \frac{a+b+c}{2}$. În acest triunghi, ABC, avem:

1) $a^2 = b^2 + c^2 <=> sin^2 A = sin^2 B + sin^2 C$

2) $m_a = R = \frac{a}{2}$

3) $a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2$

4) $\cos A + \cos B = \sin C$

5) $cos^2 A + cos^2 B + cos^2 C = 1$

6) $tg\frac{B+C}{2} \cdot tg\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}$

7) $ctg\frac{B}{2} = \frac{a+c}{2}$

8) $a\cos C - a\sin C = b - c$

9) $1 + ctg\left(\frac{\pi}{4} - B\right) = \frac{2}{1-ctgC}$

10) $4S = a^2 \sin 2B$

11) $tg\ B = \frac{\sin B + \cos C}{\cos B + \sin C}$

12) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_a}\right) = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

13) $l_a = \frac{bc\sqrt{2}}{b+c}$

14) $tg\ \left(\frac{B}{2}\right) = \sqrt{(a-c)/(a+c)}$

15) $r_a = p - c$

16) $\frac{b+c}{a} = \frac{h_a}{l_a}\sqrt{2}$

17) $r_b \cdot r_c = r(r + r_b + r_c)$

18) S = *p(p –a)=(p - b)(p – c)*

19) $S = r_b \cdot r_c = \frac{bc}{2}$

20) $r_a - r = r_b + r_c = a$

Relaţii metrice în triunghiul oarecare

1) Teorema sinusurilor: $\frac{a}{sinA} = \frac{b}{sinB} = \frac{c}{sinC} = 2R$

2) Teorema cosinusurilor: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$

3) Teorema tangentelor: $\frac{a-b}{a+b} = \frac{tg\frac{A-B}{2}}{tg\frac{A+B}{2}} = \frac{tg\frac{A-B}{2}}{ctg\frac{C}{2}} = tg\frac{A-B}{2} \cdot tg\ \frac{C}{2}$

4) Formula lui Heron: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

5) Teorema medianei: $4 \cdot m_a^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2$

6) $S = \frac{a \cdot h_a}{2}$

7) $\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{bc}}$

8) $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$

9) $tg\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$

10) $S = \frac{bc\sin A}{2} = \frac{abc}{4R}$

11) Teorema proiecţiilor: $a = b \cdot \cos C + c \cdot \cos B$

EXEMPLE DE ITEMI DE TIP EXAMEN DE BACALAUREAT

1. a) Determinaţi lungimile medianelor triunghiului ale cărui laturi au măsurile 6,8,10

b) Determinaţi laturile a şi b ale triunghiului ABC ştiind că $m_a = \sqrt{74}, m_b = \sqrt{14}, c = 6$

c) Determinaţi coordonatele centrului de greutate ale triunghiului ABC, unde $A(-4,0), B(4,0), C(0,12)$

2. Demonstraţi egalitatea $\sin 20^o \cdot \sin 40^o \cdot \sin 60^o \cdot \sin 80^o = \frac{3}{16}$.

3. Calculaţi $\sin\frac{\pi}{10}$.

4. Demonstraţi egalitatea $8 \cdot \cos\frac{\pi}{7} \cdot \cos\frac{2\pi}{7} \cdot \cos\frac{4\pi}{7} = -1$.

5. Demonstraţi egalitatea $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$.

6. Dacă $1 + ctg\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{2}{1 - ctgy}$, $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, atunci $x + y = \frac{\pi}{2}$.

7. a) Determinaţi lungimile laturilor triunghiului ale cărui mediane au măsurile 6,8,10

b) Determinaţi laturile a şi c ale triunghiului ABC ştiind că $m_a = \sqrt{74}, m_c = \sqrt{86}, b = 12$

c) Determinaţi coordonatele centrului de greutate ale triunghiului ABC,unde $A(0,-3), B(0,3), C(15,0)$

8. Dacă $1 + ctg\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{2}{1 - ctgy}$, $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, atunci $x + y = \frac{\pi}{2}$.

9. În triunghiul ABC se cunosc $m(\hat{B}) = 45^0$, $m(\hat{C}) = 75^0$, $BC = 6\sqrt{2}$. Să se afle lungimea laturii $[AC]$.

10. În triunghiul ABC $AB = AC = b$, $BC = a$, $a^2 = b^2(2 - \sqrt{3})$. Să se afle $m(\hat{A})$.

11. În triunghiul ABC se dau : AB=2a, AC=3a, a>0 şi m(A)=60^0

a) să se rezolve triunghiul ABC.

b) să se afle lungimile razelor cercurilor înscris şi circumscris triunghiului ABC

12. Să se afle măsura unghiului B din triunghiul ABC având medianele: $m_a = \sqrt{56}, m_b = \sqrt{73}, c = 6$

13. Fie paralelogramul ABCD în care AB=3 m, AD= m, I aparţine diagonalei (BD), astfel încât AI este bisectoarea unghiului BAD. Ştiind că AI=$\frac{3m\sqrt{3}}{4}$, să se afle perimetrul triunghiului ACJ, unde J este intersecţia bisectoarei AI cu latura CD.

14. Se dă un triunghi ABC În care AB ⊥AC, BC=a, m(ABC)=α, α se află în intervalul (π/4,π/2) şi proiecţia lui A pe BC este punctul D. Să se afle lungimea L a tangentei dusă din centrul cercului circumscris ΔABC la cercul înscris în acelaşi triunghi.

15. În triunghiul ABC se cunosc : a=10, b=5, c=$\sqrt{50}$.

a) Să se determine cosinusurile unghiurilor triunghiului.

b) Să se calculeze cos(B+C) c) Să se calculeze sin(2A+B)

16. Să se dedetermine lungimea diametrului circumscris unui triunghi ABC în care AC=6 şi B=30^0

17. Calculaţi lungimea laturii BC a unui triunghi în care: AB=4, AC=2, A=60^0.

18. Determinaţi aria unui triunghi ABC in care AB=3, CA=5 şi cos(A)=3/5.

19. Demonstraţi ca un triunghi cu lungimile laturilor egale cu 3, 5 si 6 este dreptunghic.

20. Se consideră triunghiulABC dreptunghic in A si in care M apartine laturii BC astfel încât MC=MA=4 si m(BAC)=30^0.

a) Calculaţi perimetrul triunghiului ABC. b) Calculaţi sin(AMB).

21. Să se rezolve triunghiul ABC dreptunghic în A ştiind că BC = 26 şi tg(B) = $\frac{12}{5}$.

22. a) Ştiind că x $\in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ şi tg x = - $\frac{5}{2}$, să se determine valorile pentru sinx, cosx, ctgx .

b) Să se aducă expresia la o formă mai simplă, pentru x din domeniul de definiţie: $E = \frac{\sin^2 x}{1-\cos x} - \frac{\cos^2 x}{1+\sin x}$.

23. Să se determine raza cercului circumscris şi raza cercului înscris triunghiului ABC cu laturile 6, 8, şi 10.

24. Dacă în triunghiul ABC are loc relaţia: $\cos^2 A - \cos^2 B + \cos^2 C = 1,$ atunci triunghiul este dreptunghic.

25. În triunghiul ABC se cunosc $m(\hat{B}) = 45^0$, $m(\hat{C}) = 75^0$, $BC = 6\sqrt{2}$. Să se afle lungimea laturii $[AC]$.

26. În triunghiul ABC $AB = AC = b$, $BC = a$, $a^2 = b^2(2-\sqrt{3})$. Să se afle $m(\hat{A})$.

27. Rezolvaţi triunghiul oarecare cu: a=12 cm, B=$\frac{\pi}{4}$, C=$\frac{5\pi}{12}$.

28. Rezolvaţi triunghiul oarecare cu: a=2 cm, b=$\sqrt{2}$ cm, c=$1+\sqrt{3}$.

Fişă de lucru

1 . Dacă într-un ΔABC raza cercului circumscris este R=3, iar latura a = $\sqrt{2}$ atunci sin(A) este ....

a) $\frac{\pi}{3}$*; b)* $\frac{\sqrt{2}}{3}$*; c)nici un raspuns corect; d)* $\frac{\sqrt{2}}{6}$.

2. În ΔABC se cunosc laturile AB=6, AC=8, m(B)=60º, atunci sin(A)= ....

a) $\sqrt{3}$*; b)* $\frac{1}{2}$ *c)nici un raspuns corect d)* $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$.

3. Să se arate că dacă ΔABC verifică relaţia $sin^2A = sin^2B + sin^2C$ atunci ΔABC este dreptunghic.

4. Să se arate că în $\forall$ ΔABC avem a) bcosC + ccosB = a; b) bcosC + ccosB = a cos(B-C);

5. Se consideră ΔABC cu AC=6, BC=5, iar raza cercului circumscris 2. Atunci suma: sinA + sinB va fi: a) 0; b) 2; c) $\frac{22}{15}$*; d) nici un raspuns corect;*

6. În ΔABC se cunosc laturile BC=5, AC=4 şi m(C)=45º. sin (B)= ....

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ *; b)* $\frac{2\sqrt{2}}{41-\sqrt{2}}$ *; c) 0 ; d)* $\frac{2\sqrt{2}}{41-20\sqrt{2}}$.

7. În ΔABC ascuţitunghic se cunosc BC = 8 cm, sin B= $\frac{1}{3}$ *şi sin C =* $\frac{1}{9}$*. Latura AB a ΔABC este egală cu: a)* $\frac{24}{4\sqrt{5}+2\sqrt{2}}$ *; b) 3 ; c) 5 ; d) nici un răspuns corect.*

8. Demonstrați că în orice triunghi avem $\frac{a}{\sin A} = 2R$