Proiect cofinanţat din Fondul Social European prin Programul Operaţional Sectorial Dezvoltarea Resurselor Umane 2007-2013
Axa prioritară 1 „Educaţia şi formarea profesională în sprijinul creşterii economice şi dezvoltării societăţii bazate pe cunoaştere"
Domeniul major de intervenţie 1.1 „Acces la educaţie şi formare profesională iniţială de calitate"
Titlul proiectului: „TEEN PERFORM - Program inovator de îmbunătăţire a rezultatelor şcolare în învăţământul liceal"
Contract număr: POSDRU/153/1.1/S/136612
Beneficiar: Inspectoratul Şcolar Judeţean Suceava

Disciplina MATEMATICĂ
FIŞĂ DE LUCRU

Tema/Unitatea: Inversa unei matrice. Ecuații matriceale. Sisteme de ecuații liniare

Expert educație: prof. ***Isac Cătălina, Colegiul Economic "Dimitie Cantemir", Suceava***

Breviar teoretic

Matrice inversabile. Ecuații matriceale

Definiție: Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$. Matricea A se numește *matrice inversabilă* dacă $\exists B \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât $AB=BA=I_n$. **Notație:** $B=A^{-1}$ (inversa matricei A).

Observații: **1.** $AA^{-1}=A^{-1}A=I_n$; **2.** $(A^{-1})^{-1}=A$.

Definiție: Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$. Matricea A se numește *matrice nesingulară* dacă $\det(A) \neq 0$ și *matrice singulară* dacă $\det(A) = 0$.
Teoremă: Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$. Matricea A este *matrice inversabilă* $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.
Definiție: Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$. Se numește *adjuncta matricei* A matricea ale cărei elemente sunt *complemenții algebrici ai matricei* transpuse ${}^tA$. **Notație:** A^* (adjuncta matricei A).
Teoremă: Dacă $A \in M_n(\mathbb{C})$ este matrice nesingulară atunci $A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}A^*$.
Teoremă: Dacă $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ sunt matrice inversabile și $\alpha \in \mathbb{C}^*$ atunci au loc relațiile:

1. $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$; **2.** $(A^n)^{-1}=(A^{-1})^n \overset{not}{=} A^{-n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$;
3. $({}^tA)^{-1}={}^t(A^{-1})$; **4.** $(\alpha A)^{-1}=\frac{1}{\alpha}A^{-1}$; **5.** $\det(A^*)=(\det(A))^{n-1}$.

Ecuații matriceale

Teoremă: Dacă $A, B, C \in M_n(\mathbb{C})$ iar A,C sunt matrice inversabile atunci au loc relațiile:
1. $AX=B \Rightarrow X=A^{-1}B$; **2.** $XA=B \Rightarrow X=BA^{-1}$; **3.** $AXC=B \Rightarrow X=A^{-1}B$

Sisteme de ecuații liniare

Definiție: Se numește *sistem de ecuații liniare* un sistem de formă:

$$(S)=\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$, unde $a_{ij} \in \mathbb{C}, b_i \in \mathbb{C}_1, i=\overline{1,m}$, j=$\overline{1,n1,n}$

Notații: A=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ (matricea sistemului); $\overline{A}$=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ (matricea extinsa a sistemului); X=$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ (matricea necunoscutelor);

- **Sisteme liniare cu cel mult 3 necunoscute; caracterizare:**
  - din punct de vedere al existeței soluţiei: compatibil (sistemul admite soluţie/soluții); incompatibil (sistemul nu admite soluţii);
  - din punct de vedere al unicităţii soluţiei unui sistem compatibil: sisteme cu soluţie unică (compatibil determinate) sau cu soluţii care depind de un parametru (simplu nedeterminate), de doi parametri (dublu nedeterminate),..

- **Studiul compatibilității sistemelor de ecuații liniare**
  - **Teoremă**(Kronecker- Capelli): Sistemul (S) este un sistem compatibil dacă și numai dacă rangA=rang$\bar{A}$.
  - **Teoremă** (Rouche): Sistemul (S) este sistem compatibil dacă și numai dacă toți determinanții caracteristici sunt nuli.
- **Metode de rezolvare:**
  - metoda substituţiei;
  - metoda reducerii (metoda lui Gauss, cu pivotare)
  - metoda matriceală: aducerea sistemului la forma matriceală AX=B=> X=A^{-1}B unde A este o matrice pătratică şi inversabilă
  - metoda lui Cramer pentru rezolvarea sistemelor liniare (numărul ecuaţiilor este egal cu numărul necunoscutelor şi $\det A \neq 0$, unde A este matricea sistemului): calcularea determinanţilor obţinuţi din determinantul matricei A prin înlocuirea, pe rând, a câte unei coloane corespunzătoare fiecărei necunoscute cu coloana termenilor liberi; determinarea soluţiei

Observație: Pentru rezolvarea sistemului (S) procedăm astfel:
a) Determinăm rangul matricei sistemului și stabilim dacă sistemul este compatibil sau nu (fie cu teorema Kronecker- Capelli, fie cu teorema lui Rouché);
b) Dacă sistemul este compatibil atunci:
- Alegem determinantul principal, ecuațiile principale, necunoscutele principale, necunoscutele secundare:
- Rezolvăm sistemul format din ecuațiile principale în care necunoscutele secundare se trec în membrul termenilor liberi și obținem necunoscutele principale exprimate în funcție de necunoscutele secundare (considerate parametri arbitrari).

Sisteme liniare omogene
Definiție: Sistemul (*S*) se numește sistem omogen dacă b_1=b_2 =...=b_m=0.
Observație: Orice sistem omogen este sistem compatibil (are cel puțin soluția nulă $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$).
Se disting cazurile:
1. ***m* > *n*** ***a)*** *rangA* <*n*, caz în care sistemul este compatibil nedeterminat ;
b) *rangA* =*n*, caz în care sistemul este compatibil determinat și admite numai soluția nulă;

2. ***m = n*** ***a)*** det (A)≠0, caz în care sistemul este compatibil determinat şi admite numai soluţia nulă;
b) det(*A*)=0, caz în care sistemul este compatibil nedeterminat.
Acesta admite şi soluţii diferite de soluţia nulă;

3. ***m < n*,** caz în care sistemul este compatibil nederminat (Δ_{car} =0).
Acesta admite şi soluţii nenule.

Exemple de itemi de tip examen de bacalaureat

1. Studiați care dintre matricele următoare sunt inversabile și,în caz afirmativ,calculați inversa:

a) $\begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & 1-i \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 10^{x+1} & 10^{x} \\ 10^{x} & 10^{x-1} \end{pmatrix}$,x ∈ $\mathbb{R}$;

c) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 9 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

2. Rezolvați următoarele ecuații matriceale: a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

b) $X\begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$;

3. Determinați parametrul real *m*,astfel încât matricele următoare sunt inversabile, pentru orice *x* ∈ $\mathbb{R}$:

a) $\begin{pmatrix} 5 & x & 3 \\ 2x & -1 & x \\ m+1 & 2 & m \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2^{x} & 3 & -1 \\ 1 & m & 2^{x} \\ 2^{x} & 5 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 5 & 10^{x+1} & 3 \\ 2\cdot 10^{x+1} & -1 & 10^{x+1} \\ m+1 & 2 & m \end{pmatrix}$;

4. Fie $A \in \mathcal{M}_2$, astfel încât $A^2 = A - I_n$.Demonstrați că:
a) matricele A și $I_n - A$ sunt inversabile; b) $A + A^{-1} = I_2$; c) $A^3 + A = A^2$.

5. Fie matricea A=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3m+2 \\ 1 & -m & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3\ (IR)$.

a) Determinaţi m∈ IR pentru care exista matricea A^{-1}
b) Determinaţi m∈ IR pentru care $A^{*} = -A^{-1}$

6. Fie matricea A(x,m)=$\begin{pmatrix} 1 & x & +3 \\ x & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3\ (IR)$.

a) Stabiliti daca A(-1,0) este singulară.
b) Determinaţi m∈ IR pentru care A(2,m) este inversabilă.
c) Determinaţi m∈ IR pentru care A(x,m) este inversabilă pentru orice x ∈ I

7. Fie matricea A=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3m+2 \\ 1 & -m & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3\ (IR)$.

a) Determinaţi m∈ IR pentru care exista matricea A^{-1}

b) Determinaţi m∈ IR pentru care $A^* = -A^{-1}$

8. Fie matricea A(x,m)=$\begin{pmatrix} 1 & x & +3 \\ x & -1 & 2 \\ 1 & 1-m & \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3\ (IR)$.

a) Stabiliti daca A(-1,0) este singulară.

b) Determinaţi m∈ IR pentru care A(2,m) este inversabilă.

c) Determinaţi m∈ IR pentru care A(x,m) este inversabilă pentru orice x ∈ IR

9. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ şi $X(a)=I_2+Aa$, unde a ∈ Z.

a) Calculaţi A^2-3A.

b) Demonstraţi că X(a)X(b) = X(a+b+3ab), oricare ar fi a,b∈ Z.

c) Arătaţi că X(a) este matrice inversabilă, oricare ar fi a,b∈ Z.

10. În $M_2(R)$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi submulţimea

$G=\{X(a) | a \in R; X(a)=I_2+aA\}$.

a) Să se verifice dacă I_2 aparţine mulţimii G.

b) Să se arate că $X(a)\cdot X(b)=X(a+b+5ab)$, $\forall a,b \in R$.

c) Să se arate că pentru $a \neq -\frac{1}{5}$ inversa matricei $X(a)$ este matricea $X\left(\frac{-a}{1+5a}\right)$.

11. Fie măricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Pentru $a \in R$ fixat, definim $B=aA+I_3$.

a) Să se calculeze $\det(B)$ pentru a=1.

b) Să se calculeze A^2, unde $A^2 = A\cdot A$.

c) Să se demonstreze că $2B-B^2=I_3$ şi să se determine B^{-1}.

12. Fie sistemul de ecuaţii liniare $\begin{cases} (a+3)x-y+z=5 \\ x+z=-1 \\ ax+2y-z=-3 \end{cases}$, a∈ R

a) Determinaţi a∈ IR pentru care marticea sistemului este singulară.

b) Rezolvaţi sistemul pentru a=-1.

13. Fie sistemul de ecuaţii liniare $\begin{cases} (2m-1)x+y+z=5 \\ x+z+mz=5 \\ x+7y-z=-1 \end{cases}$, m ∈ IR.

a) Determinaţi m∈ IR pentru care sistemul are soluţia(6, -1, 0).

b) Determinaţi m∈ IR pentru care sistemul este compatibil determinat.

c) Rezolvaţi sistemul în situaţia de la punct b) şi apoi stabiliţi dacă exista valori ale lui m pentru care soluţia găsită verifică relaţia x+z=y.

d) Rezolvaţi sistemul pentru m=-1.

14. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+y-z=3, \\ x-y+2z=a \end{cases}$ unde $a \in R$.

a) Să se calculeze determinantul matricei asociate sistemului.
b) Pentru a =0 să se rezolve sistemul.
c) Să se determine $a \in R$ astfel încât soluţia sistemului să verifice relaţia $x=y+z$.

15. Se consideră sistemul $\begin{cases} mx+y+z=m^2-3 \\ 5x-2y+z=-2 \\ (m+1)x+2y+3z=-2 \end{cases}$ unde m este un parametru real.

a) Să se determine $m \in R$, ştiind că $\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \\ m+1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -12.$
b) Să se determine $m \in R$ astfel încât sistemul să admită soluţia $(1;2;-3)$.
c) Pentru m = -1 să se rezolve sistemul de ecuaţii.

16. Se consideră sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+az=1 \\ x+4y+a^2z=1 \end{cases}$ şi matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{pmatrix} \in M_3(R)$.

a) Să se calculeze $\det(A(4))$.
b) Să se determine $a \in R$ pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.
c) Pentru $a \in R \setminus \{1;2\}$ să se rezolve sistemul.

17. Se consideră sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x+ay+a^2z=a \\ x+by+b^2z=b \\ x+cy+c^2z=c \end{cases}$ unde $a,b,c \in R$, sunt distincte două câte două.

a) Să se rezolve sistemul pentru a = 0, b =1 şi c =2.
b) Să se verifice că $\det(A)=(a-b)(b-c)(c-a)$, unde A este matricea asociată sistemului.
c) Să se demonstreze că soluţia sistemului nu depinde de numerele reale a, b şi c.

18. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+4y+4z=15 \\ 3x+(a+4)y+5z=22, \\ 3x+2y+(3-a)z=16 \end{cases}$ unde $a \in R$.

a) Pentru a=1 să se calculeze determinantul matricei asociate sistemului.
b) Să se arate că tripletul $(7;1;1)$ nu poate fi soluţie a sistemului, $\forall a \in R$.
c) Să se determine soluţia $(x_0;y_0;z_0)$ a sistemului pentru care $y_0+z_0=3$.

19. Se consideră sistemul de ecuaţii $\begin{cases} 2x-5y+4z=0 \\ -3x+y+z=-1 \\ 2x-z=a \end{cases}$, unde $a \in Z$ şi notăm cu A matricea sistemului.

a) Să se calculeze determinantul matricei A.
b) Pentru $a=1$ să se rezolve sistemul.
c) Să se determine cea mai mică valoare a lui $a \in Z$ pentru care soluţia sistemului este formată din trei numere naturale.

20. .Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+z=0 \\ ax+2y+4z=0 \\ a^2x+4y+16z=0 \end{cases}$, unde $a \in R$ şi matricea sistemului $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 2 & 4 \\ a^2 & 4 & 16 \end{pmatrix}$.

a) Pentru $a=1$ să se calculeze determinantul matricei A.
b) Să se determine mulţimea valorilor reale ale numărului a pentru care $\det(A) \neq 0$.
c) Să se rezolve sistemul pentru $a \in R \setminus \{2;4\}$

21. Fie sistemul de ecuaţii lineare: $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+my-2z=0 \\ 4x+m^2y+4z=n \end{cases}$, $m,n \in R$

a) Determinaţi m şi n pentru care (1, -1, 1) este soluţie a sistemului.
b) Determinaţi m pentru care sistemul este de tip Cramer.
c) Rezolvaţi sistemul pentru m determinat la punctul b) şi n=0.

22. Fie sistemul de ecuaţii lineare $\begin{Bmatrix} ax+2y+2z=0 \\ ax+ay+z=0 \quad ,a \in R \\ x+ay+z=0 \end{Bmatrix}$

a) Determinaţi a pentru care sistemul este compatibil determinat.
b) Determinaţi a pentru care sistemul are şi soluţii diferite de soluţia banală.

23. Pentru p,q,r $\in \mathbb{C}$ se considera sistemul $\begin{Bmatrix} x+py+p^2z=p^3 \\ x+qy+q^2= q^3 \\ x+ry+r^2z=r^3 \end{Bmatrix}$

a) Arataţi că determinantul sistemului este $\Delta=(p-q)(q-r)(r-p)$.
b) Dacă p,q,r sunt dinstincte două câte două, reyolvaţi sistemul.
c) Arataţi că dacă sistemul are soluţia (-1,1,1), atunci cel puţin două dintre valorile p,q,r sunt egale.

24. Fie sistemul $\begin{cases} x+m^2y+2mz=-2 \\ 2mx+y+m^2z=7 \\ m^2x+2my+z=-5 \end{cases}$

a) Discutaţi natura sistemului în funcţie de m $\in$ R.
b) Rezolvaţi sistemul pentru m=1.

25. Determinaţi k, astfel încât sistemul $\begin{cases} x+y+kz=2 \\ 3x+4y+2z=k \\ 2x+3y-z=1 \end{cases}$ să aibă

a) O unică soluţie b) Nicio soluţie c) Mai mult de o soluţie

26. Fie sistemul de ecuaţii liniare $\begin{cases} (a+3)x-y+z=5 \\ x+z=-1 \\ ax+2y-z=-3 \end{cases}$, a∈ R

a) Determinaţi a∈ IR pentru care marticea sistemului este singulară.
b) Rezolvaţi sistemul pentru a=-1.

27. .Fie sistemul de ecuaţii liniare $\begin{cases} (2m-1)x+y+z=5 \\ x+z+mz=5 \\ x+7y-z=-1 \end{cases}$, m ∈ IR.

a) Determinaţi m∈ IR pentru care sistemul are soluţia (6, -1, 0).
b) Determinaţi m∈ IR pentru care sistemul este compatibil determinat.
c) Rezolvaţi sistemul în situaţia de la punct b) şi apoi stabiliţi dacă exista valori ale lui m pentru care soluţia găsită verifică relaţia x+z=y.
d) Rezolvaţi sistemul pentru m=1

28. Fie sistemul $\begin{cases} 2x-2y=1 \\ 2x+my=-2 \\ x+2y=2 \end{cases}$, unde m∈ R este parametru. Determinaţi valoarea lui m pentru care sistemul este compatibil, în trei moduri:

a) Rezolvând sistemul format din prima şi a treia ecuaţie;
b) Folosind teorema lui Rouche;
c) Folosind teorema lui Kronecker-Capelli.