



UNIUNEA EUROPEANĂ



GUVERNUL ROMÂNIEI

Fondul Social European
POSDRU 2007-2013Instrumente Structurale
2007-2013MINISTERUL
EDUCAȚIEI
NAȚIONALE

OIPOSDRU

Inspectoratul Școlar
Județean Suceava

FONDUL SOCIAL EUROPEAN

Investește în
OAMENI

Proiect cofinanțat din Fondul Social European prin Programul Operațional Sectorial Dezvoltarea Resurselor Umane 2007-2013

Axa prioritară 1 „Educația și formarea profesională în sprijinul creșterii economice și dezvoltării societății bazate pe cunoaștere”

Domeniul major de intervenție 1.1 „Acces la educație și formare profesională inițială de calitate”

Titlul proiectului: „TEEN PERFORM - Program inovator de îmbunătățire a rezultatelor școlare în învățământul liceal”

Contract număr: POSDRU/153/1.1/S/136612

Beneficiar: Inspectoratul Școlar Județean Suceava

Disciplina MATEMATICĂ
FIȘĂ DE LUCRU**Tema Limite de funcții. Asimptote. Funcții continue***Expert educație: prof. Cenusă Remus, Colegiul Economic „Dimitrie Cantemir”, Suceava***&***Expert educație: prof. Nițache Tamara Eleonora, Liceul tehnologic „Goga Ionescu” Titu – Dâmbovița***Breviar teoretic****Limite de funcții****Teoremă:** O funcție are limită într-un punct finit de acumulare dacă și numai dacă are limite laterale egale în acel punct.f are limită în $x_0 \Leftrightarrow l_s(x_0) = l_d(x_0) \Leftrightarrow f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ Obs.: Funcția $f : D \rightarrow R$ nu are limită în punctul de acumulare x_0 în una din situațiile :a) există un șir $x_n \in D - \{x_0\}$ cu limita x_0 astfel încât șirul $(f(x_n))$ nu are limităb) există șirurile $(x_n), (y_n), x_n, y_n \in D - \{x_0\}$, astfel încât șirurile $(f(x_n)), (f(y_n))$ au limite diferite.**Teoremă:** Fie $f : D \rightarrow R$, o funcție elementară și $x_0 \in D$ un punct de acumulare al lui $D \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ **Teoremă (Criteriul majorării, cazul limitelor finite)**Fie $f, g : D \rightarrow R$ și x_0 un punct de acumulare al lui D . Dacă $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ și există $l \in R$ a.î. $|f(x) - l| \leq g(x), \forall x \in D \cap V, x \neq x_0, V$ vecinătate a lui x_0 și dacă $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ **Teoremă (Criteriul majorării, cazul limitelor infinite)**Fie $f, g : D \rightarrow R$, x_0 un punct de acumulare al lui D și $f(x) \leq g(x), \forall x \in D \cap V, x \neq x_0, V$ vecinătate a lui x_0 .a) Dacă $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$ b) Dacă $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ **Teoremă (Criteriul cleștelui)**Fie $f, g, h : D \rightarrow R$, x_0 un punct de acumulare al lui D și $f(x) \leq g(x) \leq h(x), \forall x \in D \cap V, x \neq x_0, V$ vecinătate a lui x_0 .



UNIUNEA EUROPEANĂ



GUVERNUL ROMÂNIEI

Fondul Social European
POSDRU 2007-2013Instrumente Structurale
2007-2013MINISTERUL
EDUCAȚIEI
NAȚIONALE

OIPOSDRU

Inspectoratul Școlar
Județean Suceava

Dacă $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$

Limite uzuale. Limite remarcabile.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} \frac{a_k}{b_m}, k = m \\ 0, m > k \\ \frac{a_k}{b_m} \cdot (\pm\infty)^{k-m}, k < m \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} = \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x} = \infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \begin{cases} \infty, \text{daca } a > 1 \\ 0, \text{daca } a \in (0,1) \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \begin{cases} 0, \text{daca } a > 1 \\ \infty, \text{daca } a \in (0,1) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = \begin{cases} \infty, \text{daca } a > 1 \\ -\infty, \text{daca } a \in (0,1) \end{cases} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \log_a x = \begin{cases} -\infty, \text{daca } a > 1 \\ \infty, \text{daca } a \in (0,1) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \arctg x = \frac{\pi}{2} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg x = -\frac{\pi}{2} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \text{arcctg} x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{arcctg} x = \pi$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg} x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad a > 0, a \neq 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg} u(x)}{u(x)} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin u(x)}{u(x)} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg u(x)}{u(x)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u(x))}{u(x)} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{u(x)} - 1}{u(x)} = \ln a, \quad a > 0, a \neq 1 \text{ unde } \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0$$

Operații fără sens: $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$

Asimptote

1. Asimptote verticale

Definiție: Fie $f: E \rightarrow R, a \in R$ punct de acumulare pentru E . Se spune că dreapta $x = a$ este asimptotă verticală la stanga pentru f , dacă $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \infty$ sau $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = -\infty$.

Definiție: Fie $f: E \rightarrow R, a \in R$ punct de acumulare pentru E . Se spune că dreapta $x = a$ este asimptotă verticală la dreapta pentru f , dacă $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \infty$ sau $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = -\infty$.



Definiție : Fie $f : E \rightarrow R, a \in R$ punct de acumulare pentru E . Se spune că dreapta $x = a$ este asimptotă verticală pentru f dacă ea este asimptotă verticală atât la stânga cât și la dreapta sau numai lateral.

2. Asimptote oblice

Teorema : Fie $f : E \rightarrow R$, unde E conține un interval de forma (a, ∞)

Dreapta $y = mx + n, m \neq 0$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul lui f dacă și numai dacă m, n sunt numere reale finite, unde $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx]$. Analog la $-\infty$.

3. Asimptote orizontale

Dacă $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l, l$ număr finit atunci $y = l$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul lui f .

Analog la $-\infty$

Obs : O funcție nu poate admite atât asimptotă orizontală cât și oblică spre $+\infty (-\infty)$

Funcții continue

Definiție Fie $f : D \rightarrow R$ și $x_0 \in D$ punct de acumulare pentru D f este continuă în $x_0 \in D$ dacă

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Dacă f nu este continuă în $x_0 \in D$, ea se numește discontinuă în x_0 , iar x_0 se numește punct de discontinuitate.

Definiții: Un punct de discontinuitate $x_0 \in D$ este punct de discontinuitate de prima speță pentru f , dacă limitele laterale ale funcției f în punctul x_0 există și sunt finite.

Un punct de discontinuitate $x_0 \in D$ este punct de discontinuitate de speță a doua dacă nu este de prima speță. (cel puțin una din limitele laterale ale funcției f în punctul x_0 nu este finită sau nu există)

Teoremă:

Fie $f : D \rightarrow R$ și $x_0 \in D$ punct de acumulare pentru $D \Rightarrow f$ continuă în $x_0 \Leftrightarrow l_s(x_0) = l_d(x_0) = f(x_0)$

Teoremă: Funcțiile elementare sunt continue pe domeniile maxime de definiție.

Operații cu funcții continue

Teoremă:

Fie $f, g : D \rightarrow R$ continue pe $D \Rightarrow f + g, f \cdot g, \frac{f}{g} (g \neq 0), |f|, \max(f, g), \min(f, g)$ sunt funcții continue pe D .

Compunerea a două funcții continue este o funcție continuă.

Teoremă: Fie $f : [a, b] \rightarrow R$ o funcție continuă a.î. $f(a)f(b) < 0 \Rightarrow \exists c \in (a, b)$ pentru care $f(c) = 0$.

Exemple de itemi de tip examen de bacalaureat

1. Calculați:

$$1. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-6}{5x-15}; \quad 2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-2}{x-1}; \quad 3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2}; \quad 4. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{2x-6}; \quad 5. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3-125}{x-5}.$$



UNIUNEA EUROPEANĂ



GUVERNUL ROMÂNIEI

Fondul Social European
POSDRU 2007-2013Instrumente Structurale
2007-2013MINISTERUL
EDUCAȚIEI
NAȚIONALE

OIPOSDRU

Inspectoratul Școlar
Județean Suceava

$$6. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^3 - 27}; \quad 7. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x+3} - \sqrt{x+7}}{4x-8}; \quad 8. \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}; \quad 9. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{(x-1)(x+2)};$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{|x|}; \quad 11. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|^2}{x-1}; \quad 12. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x+1}}{(x-1)^2}; \quad 13. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{2}}{x-1};$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 6} - \sqrt{x^2 + 2x - 6}}{x^2 - 4x + 3}; \quad 15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 5x}{4x^2}; \quad 16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2x^2};$$

$$17. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\sin^2 x - \cos^2 x}; \quad 18. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3} \operatorname{tg} x - 3}{3x - \pi}; \quad 19. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos 2x}; \quad 20. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2 \cos x};$$

$$21. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sin(x^2 + x - 2)}{\sin(x^2 3x + 2)}; \quad 22. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(1+5x)}{5x^2}; \quad 23. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x-x^2)}{x}; \quad 24. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1}{\sqrt{x} - 1};$$

$$25. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 6}{-5x^3 + x}; \quad 26. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^3 + 4x + 1}{6x^3 + x - 4}; \quad 27. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}{5x - 3}; \quad 28. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 3x}}{5x + 1};$$

$$29. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+e^{2x})}{x}; \quad 30. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \cdot \ln(\cos x); \quad 31. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} (x - \frac{\pi}{3}) \cdot \operatorname{tg} x; \quad 32. \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2};$$

$$33. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}) \sec 2x; \quad 34. \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}} \right); \quad 35. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + x^3 + 1} - x^2) \sin \frac{1}{x}.$$

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 3^x + 1, & x \leq 1 \\ ax + 2, & x > 1 \end{cases}$.

- Să se determine valoarea parametrului real a astfel încât funcția f să fie continuă în punctul $x_0 = 1$.
- Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f .
- Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} ((f(x) - 1) \cdot x)$.

3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de forma $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e} \cdot e^x - 1, & x \leq 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$.

- Să se studieze continuitatea funcției f în punctul $x_0 = 1$.
- Să se determine ecuația asimptotei oblice către $-\infty$ la graficul funcției f .



UNIUNEA EUROPEANĂ



GUVERNUL ROMÂNIEI

Fondul Social European
POSDRU 2007-2013Instrumente Structurale
2007-2013MINISTERUL
EDUCAȚIEI
NAȚIONALE

OIPOSDRU

Inspectoratul Școlar
Județean Suceava

4. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de forma $f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x < 0 \\ x^2 + x + a, & x \geq 0 \end{cases}$ unde $a \in \mathbb{R}$.
- a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția f să fie continuă în punctul $x_0 = 0$.
- b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x) + 1}{x^2 + x}$.
5. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x \geq 1 \\ -x^2 + x, & x < 1 \end{cases}$. Să se studieze continuitatea funcției f în punctul $x_0 = 1$.
6. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$. Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f .
7. Se consideră funcția $f : (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Să se determine ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ a graficului f .
8. Se consideră funcțiile $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ date prin $f_0(x) = e^{-x} - 1$ și $f_{n+1}(x) = f_n'(x)$ pentru $\forall n \in \mathbb{N}$.
- a) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $+\infty$ a graficului funcției f_0 .
- b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_2(x) + x - 1}{x^2}$.
9. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x - 1}$. Să se determine ecuația asimptotei oblice către $+\infty$ la graficul funcției f .
10. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^x$. Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{f'(x)}{f(x)} - 1 \right)$.
11. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x$. Să se scrie ecuația asimptotei oblice către $-\infty$ la graficul funcției f .
12. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ e^x, & x < 0 \end{cases}$.
- a) Să se studieze continuitatea funcției f în punctul $x_0 = 0$.
- b) Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f .
13. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax - 6, & x < 4 \\ \sqrt{x}, & x \geq 4 \end{cases}$, unde a este parametru real.
- a) Să se determine valoarea reală a lui a , astfel încât funcția f să fie continuă în punctul $x_0 = 4$.
14. a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{3x^2 - 4x + 1}$.



15. Se consideră funcția $f : (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{x}$. Să se determine asimptota verticală la graficul funcției f .

16. Studiați continuitatea funcțiilor $f : E \rightarrow R$:

a) $f(x) = x^2 + 3x - 1$, în $x = 1$;

b) $f(x) = \sqrt{4x + 5}$, în $x = 0$;

c) $f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \leq 2 \\ 2 - x, & x > 2 \end{cases}$, în $x = 2$;

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 25}{x - 5}, & x \neq 5 \\ 10, & x = 5 \end{cases}$, în $x = 5$.

17. Determinați parametrii reali a și b , pentru care funcția f este continuă în punctul $x = 1$: $f(x) = \begin{cases} ax + b, & x < 1 \\ 3, & x = 1 \\ ax^2 - 2, & x > 1. \end{cases}$

18. Stabiliți tipul de discontinuitate al funcțiilor:

a) $f(x) = \begin{cases} x + 3, & x < 1 \\ 3, & x = 1 \\ x^2 - 2, & x > 1. \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} \frac{3x}{5x^2 + 1}, & x < 0 \\ 2x^2 + 1, & x \geq 0. \end{cases}$ c) $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 2x^2, & x = 0. \end{cases}$

18. Determinați asimptotele funcțiilor $f : D \rightarrow R$, D fiind domeniul maxim de definiție:

a) $f(x) = \frac{5x^2}{x^2 - 25}$; b) $f(x) = \frac{3x^2 - 2x + 1}{x}$; c) $f(x) = 2x - \sqrt{4x^2 - 3x}$; d) $f(x) = xe^x$; e) $f(x) = \frac{|\ln x|}{x}$.