b) Arătați că B este inversabilă și determinați B^{-1}.

c) Demonstrați că $B^n \neq I_3$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Considerăm polinomul $f = X^4 + X^3 + \hat{1} \in \mathbb{Z}_2[X]$.

a) Arătați că f nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_2$.

b) Arătați că f nu se divide cu polinomul $g = X + \hat{1}$.

c) Demonstrați că polinomul $g = X^5 + X^3 + X + \hat{1} \in \mathbb{Z}_2[X]$ este divizibil cu f.

Subiectul al III-lea

1. Fie funcția $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x + \dfrac{1}{1+x}$.

a) Demonstrați că f este strict crescătoare.

b) Demonstrați că f este convexă.

c)* Arătați că $\dfrac{f(a)+f(b)}{2} \geq f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \geq f(\sqrt{ab})$, oricare ar fi $a, b > 0$.

2. a) Arătați că funcția $F(x) = \mathrm{tg}x - x$ este o primitivă a funcției $f(x) = \mathrm{tg}^2 x$ pe intervalul $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

b) Arătați că $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\,\mathrm{tg}^2 x\,dx = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\ln 2 - \dfrac{\pi^2}{32}$.

c) Demonstrați că $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\ln 2 - \dfrac{\pi^2}{32} \geq 0$.

Testul 46

Subiectul I

1. Comparați numerele $a = \log_2 4 + \log_3 9$ și $b = \sqrt{16,81}$.

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - x$. Determinați funcția $f \circ f$.

3. Arătați că ecuația $x^2 - 2x + \sin^2 a = 0$ are soluții reale, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.

4. Într-o clasă sunt 28 de elevi, dintre care 15 sunt fete. În câte moduri se poate alege un comitet reprezentativ al clasei format din 3 fete și 2 băieți?

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1, 2)$, $B(5, 6)$, $C(-1, 1)$. Determinați ecuația înălțimii dusă din vârful C în triunghiul ABC.

6. Calculați $\cos 70° + \cos 110°$.

Subiectul al II-lea

1. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A_n(n, n+2)$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Scrieți ecuația dreptei A_0A_1.

b) Arătați că toate punctele A_n sunt coliniare.
c) Demonstrați că aria triunghiului $OA_n A_{n+1}$ nu depinde de n.

2. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X], f = (X+1)^{100} + (X-3)^{100}, g = X^2 - 2X - 3$.
a) Determinați rădăcinile polinomului g.
b) Demonstrați că polinomul f nu este divizibil cu polinomul g.
c) Determinați restul împărțirii lui f la g.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcțiile $g:(1,\infty)\to\mathbb{R},\ g(x) = x - 1 - x\ln x$ și $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = \dfrac{\ln x}{x-1}$.
a) Arătați că $g(x) < 0$, oricare ar fi $x \in (1,\infty)$.
b) Demonstrați că f este strict descrescătoare pe $(1, \infty)$ și determinați imaginea funcției f.
c) Arătați că $2^{\sqrt{3}-1} > 3^{\sqrt{2}-1}$.

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{10}$ și $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.
a) Demonstrați egalitatea $f(x) = \dfrac{1-x^{11}}{1-x}$, oricare ar fi $x \neq 1$ și deduceți că $f(x) > 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
b) Arătați că funcția F este crescătoare pe $\mathbb{R}$.
c) Demonstrați că $F(x) < x\, f(x)$, oricare ar fi $x > 0$.

Testul 47

Subiectul I

1. Ordonați crescător numerele $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt[3]{3}$, $c = \sqrt[6]{6}$.
2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(3x-2) = 3f(x) - 2$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Determinați $f(1)$.
3. Determinați valorile lui $x \in [0, 2\pi]$, astfel încât $2|\sin x| = 1$.
4. După o scumpire cu 10%, o carte costă 33 lei. Care era prețul inițial al cărții?
5. Considerăm triunghiul ABC și punctul M, astfel încât $\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{MC}$. Determinați numerele reale x, y, știind că $\overrightarrow{AM} = x\cdot\overrightarrow{AB} + y\cdot\overrightarrow{AC}$.
6. Dacă $a \in \left(\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ și $\sin a = -\dfrac{4}{5}$, calculați $\operatorname{tg}\dfrac{a}{2}$.

Subiectul al II-lea

1. Pentru $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, A inversabilă, se consideră funcția $f_A : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), f_A(X) = AXA^{-1}$.
a) Calculați $f_A(I_2)$.
b) Arătați că f_A este bijectivă.