UNIUNEA EUROPEANĂ GUVERNUL ROMÂNIEI Fondul Social European POSDRU 2007-2013 Instrumente Structurale 2007-2013 MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE OIPOSDRU Inspectoratul Școlar Județean Suceava

FONDUL SOCIAL EUROPEAN
Investeşte în OAMENI

Proiect cofinanţat din Fondul Social European prin Programul Operaţional Sectorial Dezvoltarea Resurselor Umane 2007-2013
Axa prioritară 1 „Educaţia şi formarea profesională în sprijinul creşterii economice şi dezvoltării societăţii bazate pe cunoaştere"
Domeniul major de intervenţie 1.1 „Acces la educaţie şi formare profesională iniţială de calitate"
Titlul proiectului: „TEEN PERFORM - Program inovator de îmbunătăţire a rezultatelor şcolare în învăţământul liceal"
Contract număr: POSDRU/153/1.1/S/136612
Beneficiar: Inspectoratul Şcolar Judeţean Suceava

Disciplina MATEMATICĂ
FIŞĂ DE LUCRU

Tema/Unitatea: *Mulţimea numerelor reale. Progresii aritmetice. Progresii geometrice*

Expert educație: prof. Macar Maria, Colegiul Silvic „Bucovina " Câmpulung Moldovenesc, Suceava

Breviar teoretic

Mulţimea numerelor reale

1. **Intervale de numere reale**

a) Intervale mărginite

Fie a,b$\in \mathbb{R}$, a < b

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R}/\ a \le x \le b\}$ interval închis de extremităţi a,b

$(a,b) = \{x \in \mathbb{R}/\ a < x < b\}$ interval deschis

$[a,b) = \{x \in \mathbb{R}/\ a \le x < b\}$ interval închis la stânga şi deschis la dreapta

$(a,b] = \{x \in \mathbb{R}/\ a < x \le b\}$ interval deschis la stânga şi închis la dreapta

b) Intervale nemărginite

$[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R}/\ a \le x\}$ interval închis la stânga şi nemărginit la dreapta

$(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R}/\ a < x\}$ interval deschis la stânga şi nemărginit la dreapta

$(-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R}/\ x \le a\}$ interval închis la dreapta şi nemărginit la stânga

$(-\infty,a) = \{x \in \mathbb{R}/\ x < a\}$ interval deschis la dreapta şi nemărginit la stânga

Observaţie : $[a,a]=\{a\}$, $(a,a)=[a,a)=(a,a]=\emptyset$

2. **Modulul unui număr real** se defineşte astfel: $|x| = \begin{cases} x, x \ge 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$

Proprietăţi:

1. $\lvert x\rvert \ge 0, \forall\, x \in \mathbb{R}$	2. $\lvert x\rvert = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $\lvert x\rvert \ge a, a>0 \Leftrightarrow x \le -a$ sau $x \ge a$	4. $\lvert x\rvert \le a, a>0 \Leftrightarrow -a \le x \le a$
5. $\lvert x\rvert = a, a>0 \Leftrightarrow x = \pm a$	6. $\lvert x\rvert = \lvert -x\rvert, \forall\, x \in \mathbb{R}$
7. $\lvert x+y\rvert \le \lvert x\rvert + \lvert y\rvert, \forall\, x,y \in \mathbb{R}$	8. $\lvert xy\rvert = \lvert x\rvert\lvert y\rvert, \forall\, x,y \in \mathbb{R}$
9. $\left\lvert \frac{x}{y}\right\rvert = \frac{\lvert x\rvert}{\lvert y\rvert}, \forall\, x,y \in \mathbb{R}$	10. $\lvert x\rvert^2 = x^2, \forall\, x \in \mathbb{R}$

INSPECTORATUL SCOLAR JUDEŢEAN DÂMBOVIŢA

Federația Națională a Asociațiilor de Părinți - Învățământ Preuniversitar

3. Partea întreagă şi partea fracţionară a unui număr real

Definiţie: Se numeşte partea întreagă a unui număr real x cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu x. **Notaţie :** $[x]$

Definiţie: Se numeşte partea fracţionară a numărului real x numărul x-$[x]$ **Notaţie:** $\{x\}$

Observaţie: $x=[x]+\{x\}$

Proprietăţi:

1. $[x]\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R}$	2. $\{x\}\in[0,1)$
3. $[x]\le x<[x]+1, \forall x\in\mathbb{R}$	4. $[x]=x \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$
5. $\{x\}=0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$	6. $[x+k]=[x]+k, \forall x\in\mathbb{R}, \forall k\in\mathbb{Z}$
7. $\{x+k\}=\{x\}, \forall x\in\mathbb{R}, \forall k\in\mathbb{Z}$	8. $\{x\}=\{y\} \Leftrightarrow x-y\in\mathbb{R}$
9. Identitatea lui Hermite: $[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\cdots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx], x\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}^*$	

4. Identităţi fundamentale Oricare ar fi a,b,c $\in\mathbb{R}$ au loc egalităţile:

- $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$
- $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
- $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
- $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$
- $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$
- $(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$
- $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
- $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

5. Inegalităţi:

- $a+\dfrac{1}{a}\ge 2, \forall a>0$ şi $a+\dfrac{1}{a}\le -2, \forall a<0$
- Inegalitatea mediilor $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\ge\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\ge\dfrac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$,$\forall a_1,a_2,\ldots a_n\in\mathbb{N}^*$
- Inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwartz:
  $(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\ge(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2,$
  $\forall a_1,a_2,\ldots a_n,\ b_1,b_2,\ldots b_n\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$

Probleme propuse

1. Să se determine a 2015-a zecimală a numărului a=1, (1234).

2. Se consideră numărul raţional $\dfrac{1}{21}=0,a_1a_2\ldots a_n\ldots$.

a) Calculaţi $a_1\cdot a_2\cdot\ldots a_{2015}$

b) De câte ori apare cifra 4 printre cifrele $a_1,a_2,\ldots a_{2015}$?

c) Calculaţi S $=a_1+a_2+\ldots+a_{2015}$.

3. Se consideră numărul raţional $\dfrac{23}{15}=1,a_1a_2\ldots a_n\ldots$. Calculaţi S $=a_1+a_2+\ldots+a_{2015}$.

4. Se consideră numărul raţional $\frac{11}{9}=1,a_1a_2...a_n...$. Calculaţi $a_1\cdot a_2\cdot...a_{10}$

5. Să se ordoneze crescător numerele a=3,120 ; b=3,1(20) ; c= 3,(120).

6. Să se ordoneze descrescător numerele a=5, (167). b=5,1(67) , c= 5,16(7), d= 5,167.

7. Determinaţi numărul elementelor mulţimii A= $\left\{x\in\mathbb{Z}/\ \frac{6}{2x+1}\in\mathbb{Z}\right\}$.

8. Determinaţi numărul elementelor mulţimii A= $\left\{x\in\mathbb{Z}/\ \frac{8}{3x-1}\in\mathbb{Z}\right\}$.

9. Calculaţi:

a) $|-3|+2\cdot|-7|$

b) $|2-\sqrt{5}|+|3-\sqrt{5}|$

c) $\left[\frac{17}{5}\right]+\{11,6\}\cdot 5$

d) $-\left[\frac{12}{5}\right]+\left[-\frac{12}{5}\right]\cdot 5$

e) $\left[\sqrt{2015}\right]+3\cdot\left\{-\frac{1}{3}\right\}$

f) $\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{2}\right]+...+\left[\sqrt{100}\right]$

10. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţiile:

a) $|x-2|=5$

b) $|x-3|=0$

c) $|2x-1|=4$

d) $\left|\frac{2x+5}{3}\right|=1$

e) $|2x+1|=|x+5|$

f) $|4x+2|=|3x-5|$

g) $[2x+5]=7$

h) $\left[\frac{3x+2}{5}\right]=-3$

11. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ inecuaţiile:

a) $|2x-3|\le 3$ b) $|4+2x|<6$ c) $|9-x|>7$ d) $|4x-10|\ge 2$

12. Să se determine elementele mulţimii A=$\{x\in\mathbb{Z}/|-2x+17|\le 1\}$.

13. Să se determine elementele mulţimii A=$\{x\in\mathbb{N}^*/2x+3\le 5x-6\}$.

14. Să se calculeze a^2+b^2 , ştiind că numerele a şi b au suma egală cu 7 şi produsul egal cu 12.

15. Ştiind că $x+\frac{1}{x}=3$ să se calculeze $x^2+\frac{1}{x^2}$ şi $x^3+\frac{1}{x^3}$.

16. Să se determine numerele a,b ∈ $\mathbb{R}$ pentru care are loc relaţia $(a-5)^2+|a+b-3|=0$

17. Arătaţi că $x^2+3xy+4y^2\ge 0, \forall\, x,y\in\mathbb{R}$

18. Se consideră numerele x,y≥ 1. Arătaţi că $x\sqrt{y-1}+y\sqrt{x-1}\le xy$

19. Daţi un exemplu de două numere iraţionale a şi b care îndeplinesc condiţiile a+b$\in\mathbb{N}^*$şi a·b$\in\mathbb{Z}$

20. a) Să se calculeze partea întreagă a numărului $\frac{10}{\sqrt{2}-1}$.

b) Să se rezolve ecuaţia $\left[\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right]=2$

Şiruri. Progresii aritmetice

Fie $n\in N$, $n\ge 1$; $(a_n)_{n\in N^*}$ un şir de numere naturale cu termenii $a_1,a_2,...,a_n,...$ şi $S_n=a_1+a_2+...+a_n$ suma primilor n termeni ai şirului.

Şiruri mărginite:

- $(a_n)_{n\in N^*}$ este mărginit dacă există intervalul $[a,b]\subset R$ astfel încât $a_n\in[a,b],\forall n\in N^*$ ş
- $(a_n)_{n\in N^*}$ este mărginit dacă $\exists M>0$ astfel încât $a_n\le M,\forall n\in N^*$ ş

Şiruri monotone:

- $(a_n)_{n\in N^*}$ este monoton crescător dacă $a_n \le a_{n+1}, \forall n \in N^*$;
- $(a_n)_{n\in N^*}$ este monoton descrescător dacă $a_n \ge a_{n+1}, \forall n \in N^*$;
- $(a_n)_{n\in N^*}$ este monoton dacă este monoton crescător și monoton descrescător;

Progresii aritmetice:

Def: Șirul $(a_n)_{n\in N^*}$ este o progresie aritmetică de rație $r \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n + r, \ \forall n \in N^*; r = a_{n+1} - a_n$.

Proprietăți:

i. $a_n = a_1 + (n-1)r \ , \ \forall n \ge 1$

ii. $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \ , \ \forall n \ge 2$

iii. $S_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2} \ , \ \forall n \ge 1; a_n = S_n - S_{n-1} \ , \ \forall n \ge 2$

Probleme propuse

1. Determinați primii 3 termeni pentru fiecare din următoarele șiruri:

   a) $(a_n)_{n\ge 1}, a_n = \dfrac{n^2 + (-1)^n}{n+1}$ b) $(b_n)_{n\ge 1} \ , b_n = \dfrac{2^n}{n+1}$ c) $(c_n)_{n\ge 1} \ , c_n = (n+1)n$

2. Studiați monotonia șirului $a_n = \dfrac{n+1}{n} \ , \ \forall n \ge 1$
3. Studiați monotonia șirului $a_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + ... + \dfrac{1}{2n} \ , \ \forall n \ge 1$
4. Determinați termenul general al șirului definit prin relația de recurență $a_{n+1} = a_n + 5 \ , \ \forall n \ge 1$, $a_1 = -1$.
5. Determinați termenul general al șirului (a_n) dacă $a_0 = 1$ și $a_{n+1} - 2a_n = 0, \ \forall n \in N$.
6. Determinați termenul al zecelea al șirului $1,7,13,19,...$.
7. Determinați termenul al cincisprezecelea al șirului $-5,-2,1,4,....$.
8. Fie progresia aritmetică $(a_n)_{n\ge 1}$ în care $a_3 = 5, \ a_6 = 11$. Calculați a_9.
9. Fie progresia aritmetică $(a_n)_{n\ge 1}$ în care $a_1 = 7, \ a_7 = 37$. Calculați suma primilor zece termini ai progresiei.
10. Fie progresia aritmetică $(a_n)_{n\ge 1}$ în care $a_1 = -2, \ a_2 = 4$. Calculați suma primilor zece termini ai progresiei.
11. Fie progresia aritmetică $(a_n)_{n\ge 1}$ în care $a_3 = 5, \ a_6 = 11$. Calculați a_{14}.
12. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\ge 1}$ în care $a_2 = 2, \ a_4 = -2$. Să se calculeze a_{10}.
13. Să se determine primul termen al unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\ge 1}$ dacă rația este egală cu 5, iar suma primilor 10 termeni ai progresiei este egală cu 245.
14. Aflați $x \in R$ astfel încât numerele $5 - x, \ x + 7$ și $3x + 11$ să fie termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
15. Aflați $x \in R$ astfel încât numerele $x - 1, \ x + 1$ și $3x - 1$ să fie termeni consecutivi ai unei progresii aritmetie.
16. Aflați $x \in R$ astfelîncâtnumerele $x + 1, \ 2x - 3$ și $x - 3$ să fie termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

17. Calculați suma $1+11+21+31+...+110$.
18. Calculați suma $2+6+10+...+110+114$.
19. Calculați suma $1+5+9+...+25$.
20. Calculați suma $1+4+7+...+100$.
21. Să se determine numărul $x \in R$ știind că:

a) $1+4+7+...+x=210$ b) $1+3+5+...+x=225$ c) $3+7+11+...+x=136$

22. Aflați progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$, dacă $S_{10}-S_4=18$ și $a_{14}-a_{12}=4$.
23. Să se determine progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$, în care:

a) $S_n=3n^2+2n$
b) $S_n=3n^2+4n+1$

24. Să se determine primul termen și rația unei progresii aritmetice știind că:

a) $a_1+a_3=8$ și $a_1+a_6=17$
b) $a_1+a_3+a_6=-3$ și $a_3-2a_4=6$

25. Să se verifice dacă 275 este termen al progresiei aritmetice (a_n) în care $a_3=9$ și $a_{12}=27$

Progresii geometrice

Def. Şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ de numere reale se numeşte **progresie geometrică** de raţie $q \neq 0$ şi se notează $(b_n)_{n\geq 1}$ sau $b_1, b_2, b_3, \ldots$; dacă $\mathbf{b_{n+1} = b_n \cdot q}$, $(\forall)\ n\geq 1$.

Proprietăţi ale progresiilor geometrice

Fie $(b_n)_{n\geq 1}$ de raţie q. Avem : $\mathbf{b_n = b_1 \cdot q^{n-1}}$, $\mathbf{(\forall)\ n\geq 1}$.

$$\mathbf{B_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}},\ \mathbf{(\forall)\ n\geq 2}.$$

$$\mathbf{B_1 \cdot b_n = b_k \cdot b_{n-k+1}},\ \mathbf{(\forall)\ n\geq 1}.$$

Se notează cu $\mathbf{S_n}$ **suma primilor n termeni ai unei progresii geometrice,** unde $\mathbf{S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n}$. Atunci $\mathbf{S_n = b_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1}}$, $\mathbf{q \neq 1}$ și $\mathbf{S_n = n \cdot b_1}$, $\mathbf{q = 1}$.

Probleme propuse

1. Scrieţi primii 5 termeni ai progresiei geometrice, ştiind că :

a). $b_1 = 2$, şi $q = \frac{1}{2}$ b). $b_n = \frac{1}{3^{n-2}}$.

2. Să se determine al şaselea termen al şirului :$4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$.

3. Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ în care $b_1 = 2$, $b_2 = 6$. Să se calculeze b_5.

4. Aflaţi primul termen al progresiei geometrice cu termeni pozitivi $b_1, b_2, 27, 81, \ldots$

5. Determinaţi raţia $(b_n)_{n\geq 1}$ cu termeni reali, ştiind că $b_1 = 1$ şi $b_4 = 27$.

6. Calculaţi raţia $(b_n)_{n\geq 1}$ cu termeni pozitivi, dacă $b_1 + b_2 = 6$ şi $b_3 + b_4 = 24$.

7. Scrieţi termenii de rang 4,5 şi respectiv 6 pentru progresia geometrică care are primul termen 10^4, iar raţia $q = -0,1$.

8. Determinaţi al zecelea termen ai unei progresii geometrice cu primul termen 1024 şi cu raţia $\frac{1}{2}$.

9. Aflaţi primul termen şi raţia progresiei geometrice dacă $b_2 = 25$, $b_6 = 15625$.

10. Aflaţi termenul general al unei progresii geometrice ştiind că $b_4 - b_3 = 192$ şi $b_2 = 16$.

11. Fie progresia geometrică dată prin descriere : 5, 15, 45, 225, … .Să se scrie termenul al zecelea şi să se deducă formula termenului general.

12. În progresia geometrică b_n de raţie q se cunosc $b_1 = \sqrt{2}$, $b_2 = \sqrt{8}$. Se cere b_{10} şi b_n.

13. Arătaţi dacă şirul definit prin formula termenului general $b_n = \frac{3}{2^n}$ este o progresie geometrică , iar în caz afirmativ aflaţi primul termen ţi raţia.

14. Demonstraţi că următoarele numere nu pot fi termeni consecutivi ai unei progresii geometrice : $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}$.

15. Să se determine $x \in R$ pentru care numerele : $\frac{x+1}{4}$, x + 3, 4x – 1 sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

16. Să se determine $x \in R$ pentru care numerele : $2^{x-\frac{1}{2}}$, $2^{x-\frac{3}{2}}$ şi $2^{x-\frac{5}{2}}$ sunt în progresie geometrică.

17. Să se determine $x \in R$ pentru care numerele : $\sqrt{x-5}$, $\sqrt{x+9}$, 8 sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

18.Să se calculeze suma primilor10 termeni ai progresiei geometrice b_n dacă se cunosc $b_1 = 7$ şi q= -1.

19. Dacă suma primilor n termeni ai unei progresii geometrice $(b_n)_{n\geq1}$, este $S_n = 4^n-1$, atunci care este primul termen şi raţia progresiei geometrice ?

20. Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n\geq1}$. Aflaţi b_1, q, n şi S_n dacă se cunosc :

$$\frac{b_5}{b_2} = \frac{1}{27} \;;\; b_3 + b_6 = \frac{336}{243} \;;\; b_n = \frac{4}{2187}.$$

21. Să se determine suma primilor 100 de termeni ştiind : $b_1 + b_2 + b_3 = 14$ şi $b_2 + b_3 + b_4 = 28$.

22. Să se determine primul termen şi raţia într-o progresie geometrică dacă se cunosc : $S_4 = 630$ şi $S_5 = 3130$.

23. Se dă $S_n = 5^n + 5$ formula pentru şirul sumelor primilor n termeni.Să se calculeze primul termen, raţia şi S_7 .

24. Se consideră funcţia f (x) = x + 2. Să se calculeze suma : $f(3) + f(3^2) + f(3^3) +…+ f(3^{15})$.

25. Să se determine 4 numere în progresie geometrică dacă suma termenilor extremi este 27, iar suma termenilor egali depărtaţi de extremi este 18.

26. Stabiliţi dacă şirul $(b_n)_{n\geq1}$ pentru care suma primilor n termeni este $S_n = \frac{3^n-1}{2}$ este o progresie geometrică.

27. Calculaţi $P = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + … + 5^n$, $n \in N^*$, şi demonstraţi că numărul $5^{n+1}-1$ este divizibil cu 4.

28. Dacă b_1, b_2, 5, 140 sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice, aflaţi: b_1, b_2, b_3, b_{2006}.