**Proiect cofinanţat din Fondul Social European prin Programul Operaţional Sectorial Dezvoltarea Resurselor Umane 2007-2013**
**Axa prioritară 1** „Educaţia şi formarea profesională în sprijinul creşterii economice şi dezvoltării societăţii bazate pe cunoaştere"
**Domeniul major de intervenţie 1.1** „Acces la educaţie şi formare profesională iniţială de calitate"
**Titlul proiectului:** „TEEN PERFORM - Program inovator de îmbunătăţire a rezultatelor şcolare în învăţământul liceal"
**Contract număr:** POSDRU/153/1.1/S/136612
**Beneficiar:** Inspectoratul Şcolar Judeţean Suceava

**Disciplina MATEMATICĂ**
**FIŞĂ DE LUCRU**

# Tema/Unitatea: Funcții. Funcția de gradul I. Funcția și ecuația de gradul al II-lea

**Expert educație: prof. *Lungu Valentina, Colegiul Economic "Ion Ghica ", Târgoviște***
***&***
***Expert educație: prof. Ursaciuc Mihaela, Colegiul "Alexandru cel Bun", Gura Humorului, Suceava***

## *Breviar teoretic*

### *I. Funcții*

- Fie A şi B două mulţimi nevide. Spunem că am definit **o funcţie** pe mulţimea A cu valori în B dacă printr-un procedeu oarecare facem ca **fiecărui element** $x \in A$ să-I corespundă **un singur element** $y \in B$. O funcţie definită pe A cu valori în B se notează $f : A \to B$, A = **domeniul de definiţie**; B = **codomeniul**;
- Fie $f : A \to B$. Se numeşte **imagine a funcţiei** $f$, notată $\mathrm{Im}f$ sau $f(A)$, partea lui B constituită din toate imaginile elementelor lui A. Deci, $\mathrm{Im}f = V(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ sau $\mathrm{Im}f = \{y \in B \mid \exists x \in A$ astfel încât $f(x) = y\}$.
- Funcţia $f$ este **strict crescătoare** pe I dacă: $(\forall)x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- Funcţia $f$ este **strict descrescătoare** pe I dacă: $(\forall)x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
- $D \subset R$ se numeşte **mulţime simetrică** dacă $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.
- Fie $f : D \to R$, D simetrică, $f$ s.n. **funcţie pară** $\forall x \in D$ $f(-x) = f(x)$ şi $f$ s.n**. funcţie impară** $\forall x \in D$ $f(-x) = -f(x)$
- Dacă există $x_0 \in I$ astfel încât $f(x) \le f(x_0)$, $\forall x \in I$, atunci $f(x_0)$ se numeşte **maximul funcţiei *f* pe mulţimea I** şi scriem $f(x_0) = \max f(x)$. Punctul $x_0$ pentru care se obţine valoarea maximă a lui $f$ pe I se numeşte **punct de maxim pentru funcţia *f* pe I.**(fig. 1)
- Dacă există $x_1 \in I$ astfel încât $f(x) \ge f(x_1)$, $\forall x \in I$, atunci $f(x_1)$ se numeşte **minimul funcţiei *f* pe mulţimea I** şi scriem $f(x_1) = \min f(x)$. Punctul $x_1$ pentru care se obţine valoarea minimă a lui $f$ pe I se numeşte **punct de minim pentru funcţia *f* pe I.**
- O functie $f$: $A \to B$ se numeste **functie injectiva** ( sau simplu **injectie**) daca orice element din B este imaginea prin $f$ a el mult unui element din A, ceea ce-I echivalent cu faptul ca pentru orice $y \in B$ ecuatia $f(x) = y$ are cel ,ult o solutie $x \in A$. Altfel spus, functia $f$ este injective daca si numai daca doua elemente diferite oarecare din A au imagini diferite in B prin $f$, adica $f$: $A \to B$ este injectiva $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A$ , $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
- O functie $f$: $A \to B$ se numeste **functie surjectiva** ( sau simplu **surjectie**), daca orice element din B este imaginea prin $f$ a cel putin unui element din A, ceea ce-i echivalent cu faptul ca pentru orice $y \in b$ ecuatia $f(x) = y$ are cel putin o solutie $x \in A$.

- O functie $f$: A → B se numeste **functie bijectiva** ( sau simplu **biejctie**), daca este atat injective cat si surjectiva
- Fie $f$: A → B o functie bijectiva. Se numeste **functie inversa** a functiei $f$, functia $g$: B → A, care asociaza fiecarui element y din B elementul unic x din A astfel incat $f(x) = y$. Pentru functia $g$ utilizam notatia $f^{-1}$ (citim "f la minus unu"). O functie $f$ care are inversa se spune ca este **invesabila**. Functia $f$ se numeste **functie directa**, iar $f^{-1}$ **functie inversa** (a lui $f$).
- Fie A, B, C mulţimi nevide şi funcţiile $f : A \to B$, $g : B \to C$. Se numeşte **compusa funcţiei g cu funcţia *f*** (sau funcţia compusă din $f$ şi g), considerată în această ordine, funcţia notată $g\circ f$ , definită astfel: $\mathbf{g\circ f : A \to C\ ,\ (g\circ f)(x) = g(f(x))}$, $\forall x \in A$.

## *II. Funcţia de gradul I*

- Funcţia $f : R \to R$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in R$ se numeşte **funcţie afină**. Dacă $a \neq 0$, atunci $f$ se numeşte **funcţie de gradul întâi** de coeficienţi a, b. Dacă $a \neq 0$ şi $b = 0$ atunci $f$ se numeşte **funcţie liniară** ($f(x) = ax$).
- **Funcţia de gradul întâi $f : R \to R$, $f(x) = ax + b$ , $a \neq o$ este:**
  **strict crescătoare** daca $a > 0$; **strict descrescătoare** dacă $a < 0$.
- Funcţia de gradul întâi $f : R \to R$, $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$ are zeroul $x = -b/a$, iar semnul funcţiei este dat în tabelul de semn:

| x | $-\infty$ | | $-b/a$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | semn contrar lui a | 0 | acelaşi semn cu a | |

- Graficul funcţiei de gradul întâi este o dreaptă oblică de ecuaţie $y = ax + b$. Pentru trasarea unei drepte sunt necesare două puncte care aparţin graficului.

### *III. Funcţia de gradul al doilea.*

- Funcţia $f : R \to R$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in R$, $a \neq 0$ se numeşte **funcţie de gradul al doilea** (sau funcţie pătratică) cu coeficienţii a, b, c.
- Fie funcţia de gradul doi $f : R \to R$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.
  - Dacă $a > 0$, atunci $f$ este **strict descrescătoare** pe $(-\infty, -b/2a]$ şi $f$ este **strict crescătoare** pe $[-b/2a, \infty)$.
  - Dacă $a < 0$, atunci $f$ este **strict crescătoare** pe $(-\infty, -b/2a]$ şi $f$ este **strict descrescătoare** pe $[-b/2a, \infty)$.

- **Fie : $R \to R$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.**
  - Dacă $\Delta > 0$, atunci ecuaţia ataşată lui $f$ are două rădăcini reale distincte $x_1 < x_2$, iar semnul lui $f$ este cel al lui a în afara rădăcinilor şi semn contrar lui a între rădăcini:

| x | $-\infty$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | semnul lui **a** | 0 | semn contrar lui **a** | 0 | semnul lui **a** | |

  - Dacă $\Delta = 0$, atunci ecuaţia ataşată lui $f$ are două rădăcini reale egale $x_1 = x_2 = -b/2a$, iar semnul funcţiei $f$ este cel al lui a pe $R/\{-b/2a\}$. Dacă $\Delta < 0$, atunci ecuaţia ataşată lui $f$ nu are rădăcini reale, iar semnul funcţiei $f$ este semnul lui a pe R.

| x | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | semnul lui **a** | |

- *Forma generală* a **ecuației de gradul doi** este: $ax^2 + bx + c = 0$, unde: x este variabila, iar a, b, și c constantele (a ≠ 0). Dacă constanta a = 0, atunci ecuația devine o ecuație liniară.
- Rădăcinile ecuației algebrice de gradul doi se obțin cu ajutorul formulei $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$, unde $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$
- Notam cu $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}, si P = x_1 . x_2 = \dfrac{c}{a}$ numite **relatiile lui Viete.**
- Daca $x_1, x_2$ sunt solutiile reale ale ecuatiei $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ atunci exista egalitatea: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

## *Aplicații*

### *I. Funcţii*

**1.** Se consideră funcţia $f:[0;1] \to R,\ f(x) = -x^2$. Să se determine mulţimea valorilor funcţiei *f*.

**2.** Se consideră funcţia $f: R \to R,\ f(x) = x - 3.$ Să se determine $f(-4) \cdot f(-3) \cdot \ldots \cdot f(3) \cdot f(4).$

**3.** Se consideră funcţia $f: R \to R,\ f(x) = 2x + 1.$ Să se calculeze $f(-2) + f(-1) + f(0) + f(1).$

**4.** Fie funcţia $f: R \to R,\ f(x) = mx^2 - 8x - 3,$ unde *m* este un număr real nenul. Să se determine *m* ştiind că valoarea maximă a funcţiei *f* este egală cu 5.

**5.** Fie funcţiile $f: R \to R,\ f(x) = x + 3$ şi $g: R \to R,\ g(x) = 2x - 1.$ Să determine soluţia reală a ecuaţiei $2f(x) + 3g(x) = -5.$

**6.** Fie funcţiile $f, g: R \to R,\ f(x) = x^2 - x + 1$ şi $g(x) = x + 4.$ Să se calculeze coordonatele punctulului de intersecţie al graficelor funcţiilor *f* şi *g*.

**7.** Fie funcţia $f: R \to R,\ f(x) = 3 - 4x$. Să se determine soluţiile reale ale inecuaţiei $f(x) - 1 \geq 4x.$

**8.** Se consideră funcţia $f: R \to R,\ f(x) = 2x + 1.$ Să se determine punctul care aparţine graficului funcţiei f şi are abscisa egală cu ordonata.

**9.** Fie funcţia $f: R \to R,\ f(x) = mx^2 - mx + 2,$ unde *m* este un număr real nenul. Să se determine numărul real nenul *m* ştiind că valoarea minimă a funcţiei este egală cu 1.

**10.** Se consideră funcţia $f: R \to R,\ f(x) = 2x - 1.$ Să determine soluţiile reale ale ecuaţiei $f^2(x) + 2f(x) - 3 = 0.$

**11.** Se consideră funcţia $f: R \to R,\ f(x) = ax + b.$ Să se determine numerele reale a şi b ştiind că $3f(x) + 2 = 3x + 5,$ pentru $\forall x \in R.$

**12.** Să se determine $m \in R$, ştiind că reprezentarea grafică a funcţiei $f: R \to R,\ f(x) = x^2 - mx + m - 1$ este tangentă axei *Ox*.

**13.** Se consideră funcţia $f: R \to R,\ f(x) = x^2 - 11x + 30.$ Să se calculeze $f(0) \cdot f(1) \cdot \ldots \cdot f(6).$

**14.** Fie funcţia $f: R \to R,\ f(x) = x^2 + 5x + m + 6$. Să se determine valorile numărului real m ştiind că $f(x) \geq 0$, pentru $\forall x \in R.$

**15.** Să se determine $m \in R \setminus \{1\}$, ştiind că abscisa punctului de minim al graficului funcţiei $f: R \to R,\ f(x) = (m-1)x^2 - (m+2)x + 1$ este egală cu 2.

**16.** Să se calculeze distanţa dintre punctele de intersecţie ale reprezentării grafice a funcţei $f: R \to R,\ f(x) = -x^2 + 2x + 8$ cu axa *Ox*.

**17.** Se consideră funcţia $f: R \to R,\ f(x) = x^2 - 6x + 5.$ Să se determine punctul de intersecţie al dreptei de ecuaţie $y = -4$ cu reprezentarea grafică a funcţiei *f*.

**18.** Se consideră funcţia $f:R\to R,\ f(x)=2+x$. Să se calculeze $f(1)+f(2)+...+f(20)$.

**19.** Se consideră funcţia $f:R\to R,\ f(x)=x+3$. Să se calculeze $f(2)+f(2^2)+...+f(2^7)$.

**20.** Să se demonstreze că parabola funcţiei $f:R\to R,\ f(x)=x^2-2mx+m^2+1$ este situată deasupra axei *Ox*, oricare ar fi $m\in R$.

**21.** Se consideră funcţia $f:R\to R,\ f(x)=2011x-2010$. Să se verifice dacă punctul $A\left(\frac{2012}{2011};2\right)$ aparţine graficului funcţiei *f*.

**22.** Să se determine coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei $f:R\to R,\ f(x)=x^2+4x-5$.

**23.** Se consideră funcţia $f:R\to R,\ f(x)=x^2-3x+1$. Să se determine numerele reale *m* pentru care punctul $A(m;-1)$ aparţine graficului funcţiei *f*.

**24.** Să se determine funcţia de gradul al II –lea al cărei grafic conţine punctele $A(1;3),\ B(0;5)$ şi $C(-1;11)$.

**25.** Să se determine valoarea maximă a funcţiei $f:[-1;1]\to R,\ \ f(x)=-2x+3$.

**26.** Să se determine punctele de intersecţie ale graficelor funcţiilor $f,g:R\to R,\ f(x)=x^2-3x-1$ şi $g(x)=x+4$.

**27.** Să se determine funcţia $f:R\to R,\ f(x)=ax+b$ al cărei grafic trece prin punctele $A(2;7)$ şi $B(-1;-2)$.

## *II. Ecuația de gradul al doilea. Inecuații*

**1.** Să se calculeze $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$, ştiind că $x_1$ şi $x_2$ sunt soluţiei ecuaţiei $x^2-x-2=0$.

**2.** Să se calculeze $x_1+x_2+x_1x_2$ ştiind că $x_1$ şi $x_2$ sunt soluţiei ecuaţiei $x^2-2x-2=0$.

**3.** Să se determine $m\in R$, ştiind că $\{x\in R\,|\,x^2-(m+2)x+m+1=0\}=\{1\}$.

**4.** Să se demonstreze că dacă $x_1$ este soluţie a ecuaţiei $x^2-2008x+1=0$, atunci $x_1+\frac{1}{x_1}=2008$.

**5.** Să se demonstreze că, dacă $a\in R^*$, atunci ecuaţia $ax^2-(2a+1)x+a+1=0$ are două soluţii reale distincte.

**6.** Să se demonstreze că pentru orice *a* real, ecuaţia de gradul al doilea $(1+\cos a)x^2-(2\sin a)x+1-\cos a=0$ admite soluţii reale egale.

**7.** Să se determine o ecuaţie de gradul al II –lea ale cărei soluţii $x_1$ şi $x_2$ verifică simultan relaţiile $x_1+x_2=2$ şi $x_1x_2=-3$.

**8.** Să se demonstreze că ecuaţia $x^2-2x+1+a^2=0$ nu admite soluţii reale, oricare ar fi $a\in R^*$.

**9.** Să se determine $m\in R$, ştiind că soluţiile $x_1,\ x_2$ ale ecuaţiei $x^2-(2m+1)x+3m=0$ verifică realţia $x_1+x_2+x_1x_2=11$.

**10.** Se consideră ecuaţia $x^2+3x-5=0$ cu soluţiile $x_1$ şi $x_2$. Să se calculeze $x_1^2+x_2^2$.

**11.** Se consideră ecuaţia $x^2+mx+2=0$ cu soluţiile $x_1$ şi $x_2$. Să se determine valorile reale ale lui *m* pentru care $(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=5$.

**12.** Să se formeze o ecuaţie de gradul al doilea, ştiind că aceasta are soluţiile $x_1=2$ şi $x_2=3$.

**13.** Se consideră ecuaţia $x^2-x+m=0$ cu soluţiile $x_1$ şi $x_2$. Să se determine numărul *m* pentru care $\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}=-\frac{3}{4}$.

**14.** Să se determine valoriele reale ale numărului *m* pentru care *x*=5 este soluţie a ecuaţiei $m^2(x-1)=x-3m+2$.

**15.** Să se determine $m\in R$ astfel încât $x^2-(m-3)x+m-3>0$, pentru orice *x* real.

**16.** Să se determine valorile reale ale parametrului $m$ ştiind că soluţiile $x_1$ şi $x_2$ ale ecuaţiei $x^2+(m-1)x+3=0$ verifică egalitatea $x_1=3x_2$.

**17.** Să se calculeze valoarea expresiei $E(x)=x^2-4x-1$ pentru $x=2+\sqrt{5}$.

**18.** Să se determine valorile reale ale parametrului $m$ astfel încât ecuaţia $x^2+mx+9=0$ sadmită două soluţii egale.

**19.** Să se arate că soluţiile $x_1$ şi $x_2$ ale ecuaţiei $x^2-x-1=0$ verifică relaţia $x_1^2+x_2^2=x_1+x_2+2$.

**20.** Ştiind că $x_1$ şi $x_2$ sunt soluţiile ecuaţiei $x^2-2008x+1=0$, să se calculeze $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$.

**21.** Să se determine valorile reale ale numărului $m$ ştiind că soluţiile $x_1$ şi $x_2$ ale ecuaţiei $x^2-mx-m-6=0$ verifică relaţia $4(x_1+x_2)+x_1x_2=0$.

**22.** Să se demonstreze că pentru orice $m\in R$ ecuaţia $x^2+mx-m^2-1=0$ are două soluţii reale distincte.

**23.** Ecuaţia $x^2+px-p=0$, cu $p\in R$, are soluţiile $x_1$ şi $x_2$. Să se verifice dacă expresia $x_1+x_2-x_1x_2$ este constantă.

**24.** Se consideră ecuaţia de gradul al II –lea $x^2-x+m=0$. Să se determine $m\in R$ astfel încât ecuaţia să admită soluţii de semne contrare.

**25.** Să se arate că produsul soluţiilor ecuaţiei $mx^2-2008x-m=0$ este constant, $\forall m\in R^*$.

**26.** Să se determine numărul real $m$ astfel încât soluţiile ecuaţiei $x^2-mx-1=0$ să fie numere reale opuse.

**27.** Să se determine parametrul real $m$ astfel încât soluţiile ecuaţiei $x^2-3x+m=0$ să fie inverse una alteia.

**28.** Să se determine $m\in R^*$ astfel încât soluţiile ecuaţiei $x^2-3x+m=0$ să aibă semne opuse. Să se rezolve inecuaţia $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\le 0$.

**29.** Să se determine $m\in R$ pentru care $x^2-mx+3>0,\forall x\in R$.

**30.** Să se rezolve inecuaţia $\frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12}\ge 0$.

**31.** Să se determine suma soluțiilor întregi ale inecuației $x^2-4x-5\le 0$.

**32.** Să se determine suma soluțiilor naturale ale inecuatiei $x^2-2x-3\le 0$.

## *III. Bonus*

**1.** Să se rezolve în **R** ecuațiile: a) $\frac{(3-x)^3+(4+x)^3}{(3-x)^2+(4+x)^2}=7$ b) $x(x+1)(x+2)(x+3)=24$

c) $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2=m(m-1),\quad m\in R$ Discuție.

**2.** Să se determine valorile parametrului real $m$ astfel incat ecuatia $x(x-1)(x-2)(x-3)=m$ sa aiba toate rădăcinile reale.

**3.** Să se arate ca daca ecuatiile $x^2+ax+b=0$ si $x^2+cx+d=0, a,b,c,d\in\mathbf{Z}$ au o rădăcină iratională comună, atunci $a=c$ si $b=d$.

**4.** Se dă ecuatia $(m+1)x^2-(m^2+m+6)x+6m=0, m\in\mathbf{Z}$; a)Sa se determine valorile lui $m$ pentru care ecuatia are ambele radacini intregi si pozitive. In acest caz, sa se rezolve ecuatia. b)Sa se determine valorile lui $m$ astfel incât $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{m+7}{18}$

**5.** Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel incat intre radacinile ecuatiilor urmatoare sa existe relatia scrisa in dreptul fiecareia:

**a)** $(m+1)x^2+2mx+5=0 \qquad x_1-x_2=2$ **b)** $x^2-3mx+m^2=0 \qquad x_1^2+x_2^2=\dfrac{7}{4}$

**c)** $(14m-1)x^2-2mx+1=0 \qquad 3x_1x_2=2x_1-x_2$

**6.** Se dă ecuatia $2x^2+(m+1)x+5m-2=0$ cu radacinile $x_1, x_2$. Să se formeze ecuatia de gradul al II-lea in $y$ având radacinile: $y_1=\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1+x_2}; y_2=\dfrac{x_2}{x_1}+\dfrac{x_1}{x_1+x_2}$

**7.** Pentru $f,g:R\to R, f(x)=1-x, g(x)=2x+7$ să se stabilească semnul funcției : $h:R\to R$ , $h(x)=(f\circ g)(x)+(g\circ f)(x)$

**8.** Să se determine $A\cap B$ dacă :

$$A=\left\{x\in R / x+3<\frac{2x+13}{3}<x+5\right\} \text{ şi } B=\left\{x\in R / \frac{3(x-2)+4}{2}\le 2x-1\le\frac{4(x+2)-3}{3}\right\}$$