UNIUNEA EUROPEANĂ GUVERNUL ROMÂNIEI Fondul Social European POSDRU 2007-2013 Instrumente Structurale 2007-2013 MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE OIPOSDRU Inspectoratul Şcolar Judeţean Suceava

FONDUL SOCIAL EUROPEAN
Investeşte în OAMENI

Proiect cofinanţat din Fondul Social European prin Programul Operaţional Sectorial Dezvoltarea Resurselor Umane 2007-2013
Axa prioritară 1 „Educaţia şi formarea profesională în sprijinul creşterii economice şi dezvoltării societăţii bazate pe cunoaştere"
Domeniul major de intervenţie 1.1 „Acces la educaţie şi formare profesională iniţială de calitate"
Titlul proiectului: „TEEN PERFORM - Program inovator de îmbunătăţire a rezultatelor şcolare în învăţământul liceal"
Contract număr: POSDRU/153/1.1/S/136612
Beneficiar: Inspectoratul Şcolar Judeţean Suceava

Disciplina MATEMATICĂ
FIŞĂ DE LUCRU

Tema/Unitatea: Numere reale. Radicali. Puteri. Logaritmi. Numere complexe. Funcții și ecuații

Expert educație: prof. Tarcomnicu Nicolae, Liceul Teoretic „I. C. Vissarion " Titu, Dâmbovița

Radicalul de ordinul n, $n \in \mathbb{N}^*/\{1\}$

Proprietati:
In conditiile de existenta a radicalilor au loc relatiile:

a) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$;

b) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$;

c) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

d) $\sqrt[n]{a^{mn} \cdot b} = a^m \sqrt[n]{b}$, $a \geq 0$; $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$ (amplificare)

Dacă $a, b \in [0,+\infty)$ atunci $\sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{b} \leftrightarrow a \leq b$

- **Rationalizarea numitorilor**
  - **Expresiile conjugate** sunt expresiile al caror produs nu contine radical
  - Pentru a rationaliza o fractie se amplifica fractia cu expresia conjugata a numitorului

  a) numitor de formare $\sqrt[n]{a^k}$, $a > 0$, $k < n$. Se amplifica cu $\sqrt[n]{a^{n-k}}$ si se obtine $\sqrt[n]{a^k} \cdot \sqrt[n]{a^{n-k}} = a$

  b) numitor de forma $(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})$. Se foloseste formula $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = a-b$

  Logaritmul unui numar real pozitiv
- Fie a>0 un numar real pozitiv, $a \neq 1$. Consideram ecuatia exponentiala $a^x = N, N > 0$ ecuatia exponentiala are o solutie unic determinata, iar aceasta solutie se noteaza $x = \log_a N$ numit logaritmul numarului pozitiv **N** in baza **a**.

Din cele doua relatii obtinem $a^{\log_a N} = N$ **adica algoritmul unui numar real pozitiv este exponentul la care trebuie ridicata baza "a" pentru a obtine numarul dat** .

Obs: Logaritmii in baza zece se mai numesc si logaritmi zecimali si se noteaza $\lg$, adica daca avem $\log_{10} 100$, putem sa scriem $\lg 100 = 2$

Aplicații

1. Sa se efectueze:
$\sqrt{2}(3\sqrt{2}-3\sqrt{50}+4\sqrt{18})$

2. Sa se determine $x \in IR$ pentru care exista expresiile:
a) $\log_5(x-4)$;
b) $\log_{1/2}(4-x^2)$;
c) $\log_{0,2}(2x^2-6x)$;
d) $\log_x(6-x)$;
e) $\log_3\frac{2x-1}{4x+3}$

3. Sa se ordoneze crescator numerele $3^{51}, 2^{102}, 6^{34}$

4. Sa se calculeze
   a) $\log_7 2009-\log_7 287-1$
   b) $10^{\lg 7}-\sqrt[3]{343}$

5. Sa se arate ca :
   a) $2\in(\log_3 4,\sqrt{5})$;
   b) $\log_2 3\in(1,2)$;

6. Sa se calculeze partea intreaga a numerelor
   a) $\log_3 25$
   b) log235
   c) $\log_2 500$

7. Sa se exprime in functie de $a=\log_2 5$ numerele:
   a)$\log_8 10$
   b)$\log_{100} 20$

   8. Stiind ca $\log_3 2=a$, sa se demonstreze ca $\log_{16} 24=\frac{1+3a}{4a}$.

MULTIMEA NUMERELOR COMPLEXE

Forma algebrica.Operatii

Multimea numerelor complexe sub forma algebrica se defineste astfel: C = {z=a+bi|a,b€R, $i^2=-1$}.

Numarul a se numeste partea reala a numarului complex z (se noteaza Re(z)), numarul b se numeste coeficientul partii imaginare a numarului complex z (se noteaza Im(z)), iar i este unitatea imaginara.

Punctul M(a,b), din planul raportat la reperul ortogonal xOy, se numeste imaginea geometrica a numarului complex z = a + bi, iar z poarta numele de afixul punctului M.
Se constata, cu usurinta, ca distanta de la origine la punctul M(a,b), este data de formula:

$$OM=|z|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Numarul |z|, astfel calculat, se numeste modulul numarului complex z.
Numarul a - bi, care se noteaza $\overline{z}$se numeste conjugatul numarului complex z.

Operatiile algebrice de adunare, inmultire si ridicare la o putere naturala se fac in mod obisnuit, tinandu-se cont, doar, de definitia unitatii imaginare: $i^2 = -1$.
Avem, evident: $i^0=1\ (prin\ definitie),\ i^1=i,\ i^2=-1,\ i^3=-i,\ i^4=1;$

Modulul unui numar complex

Definitie: Fie $z\in C\quad z=a+ib$. Numim modulul lui z, numarul real pozitiv $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$
Proprietati:
1. $|z|\geq 0$
2. $|z|=0\Leftrightarrow z=0$
3. $|z|=|\overline{z}|$
4. $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$
5. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$
6. $z\cdot\overline{z}=|z|^2$
7. $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$(inegalitatea triunghiului).

Forma trigonometrica:

Multimea numerelor complexe sub forma trigonometrica se defineste astfel:
$\mathbb{C}=\{z=r(\cos t+i\sin t),\ r\geq 0, 0\leq t<2\pi\}.$
(Numarul nenegativ r se numeste modul, iar t se numeste argument redus*)*.
Forma trigonometrica a unui numar complex nereal, cand se cunoaste forma sa algebrica z = a + bi, unde a si b sunt numere reale, b nenul, este: $z=r(cost+isint),\ unde\ r=\sqrt{a^2+b^2}$
este formula de calcul a modulului, iar argumentul sau redus t se calculeaza dupa cum urmeaza:
I) Daca a este diferit de 0, atunci: $t=arctg\frac{b}{a}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$
Distingem cazurile:
- $a,b>0\Rightarrow k=0,\ deci\ t=arctg\frac{b}{a};$
- $a<0, b\in\mathbb{R}^*\Rightarrow k=1,\ deci\ t=arctg\frac{b}{a}+\pi;$
- $a>0, b<0\Rightarrow k=2,\ deci\ t=arctg\frac{b}{a}+2\pi.$

II) Daca a = 0 si b > 0, atunci t = $\frac{\pi}{2}$;

Daca a = 0 si b < 0, atunci $t = \frac{3\pi}{2}$.
Daca a = b = 0, atunci z = 0 (t este nedeterminat).

OPERATII:

1) Inmultirea:

$z_1z_2=r_1r_2[\cos(t_1+t_2)+i\sin n(t_1+t_2)]$

2) Puterea naturala a unui numar complex:

$[r(\cos t + i\sin t)]^n = r^n(\cos nt + i\sin nt)$;

3) Radacina de ordinul n dintr-un numar complex:

z = r(cost + isint), scris sub forma trigonometrica;

4) Radacinile de ordinul n ale unitatii:

unde numarul

$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$

se numeste *radacina primitiva a unitatii.*

5)Impartirea:

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(t_1-t_2)+i\sin(t_1-t_2)]$

6) Ridicarea la putere:

$z_1^n=r_1^n(\cos nt_1+i\sin nt_1)$

Ecuatii binome :

Forma generala :$z^n-c=0, c\in C, n\in\mathbb{N}, n\geq 2$.solutiile sunt radacinile de ordinul n ale numarului c.

Aplicații

1. Sa se determine numerele reale x si y asfel incat sa aiba loc egalitatea de numere complexe:
   a)5-2x+(4y-x)i=3y-4+(5+x)i   b)x(1+2i)+y(2-i)=4+3i

2. Sa se calculeze:
   a) (1-i)(1+2i)-3(2-i)   c) $(1+i)^2-(1-i)^2$
   b)(2+3i)(4+5i)(-7+22i)   d)$(2+i)^3+(2-i)^3$

3. Sa se calculeze:
   a) $(2+i)^4+(2-i)^4$ b)$(1+i)^{20}$

4. Sa se determine partea reala a numerelor complexe:
   a) $z=(\sqrt{3}+i)^6$ b)$z=(1-i)^{10}+(1+i)^{10}$

5. Sa se calculeze valoarea expresiilor:
   a) $1+i+i^2+.....i^{10}$ b)$i\cdot i^2\cdot i^3\cdot......i^{10}$ c)$(1-i)(1-i^2)(1-i^3)\cdot....(1-i^{2008})$

6. Sa se determine a ϵIR , stiind ca z=a +(1-a)i are modulul 1.

7. Se considera ecuatia $x^2-6x+12=0$ cu solutiile complexe x_1,x_2. Sa se calculeze:
   a) $x_1^2+x_2^2$ b)$x_1^3+x_2^3$

8. Sa se formeze ecuatia de gradul doi cu coeficienti reali cunoscand o solutie:
   a)$z_1=4-3i$ b)$z_1=(5-i)\cdot i$

9.Sa se rezolve ecuatiile bipatrate:
   a)$z^4+5z^2-36=0$ b) $20z^4+z^2-1=0$ c)$z^4+15z^2-16=0$ d)$9z^4+4z^2=0$

10. Sa se calculeze suma solutiilor ecuatiei $z^4=1$

FUNCTII SI ECUATII

Functii injective
Fie A si B doua multimi nevide
Def: *O functie $f:A\to B$ se numeste injectiva (injectie) daca $\forall x_1,x_2\in A, x_1\neq x_2$ avem $f(x_1)\neq f(x_2)$*
Observatie
Faptul ca f este injectiva mai poate fi exprimat si astfel:
1) daca $x_1$si $x_2$sunt elemente oarecare din A cu proprietatea ca $f(x_1)=f(x_2)$, atunci rezulta ca $x_1=x_2$
2) Functia $f:A\to B$este injectiva daca $\forall y\in B$ecuatia $f(x)=y$are cel putin o solutie $x\in A$.
Functii surjective
Def: O functie $f:A\to B$este o functie surjectiva (surjectie) daca pentru oricare $y\in B\exists$ cel putin un $x\in A$astfel incat $f(x)=y$
Observatie
O functie $f:A\to B$este o functie surjectiva, daca $\forall y\in B$ecuatia $f(x)=y$are cel putin o solutie $x\in A$.
Functii bijectiva
Def: *O functie $f:A\to B$care este simultan si injectiva, dar si surjectiva se numeste bijectiva (bijectie).*

Exemplu
1) Fie functia $f:R\to R, f(x)=2x+3$sa se ararte ca f este bijectie.
Solutie
Pentru a arata ca functia este bijectiva aratam mai intai ca functia f este injectiva si surjectiva
Injectia: $\forall x_1,x_2\in A$fie $x_1\neq x_2$trebuie sa obtinem ca $f(x_1)\neq f(x_2)$
astfel obtinem $f(x_1)-f(x_2)\neq 0\Rightarrow 2x_1+3-2x_2-3=2(x_1-x_2)\neq 0$deci f este injectiva.
Surjectivitatea
Fie $y\in R$exista cel putin un $x\in R$astfel incat $f(x)=y\Rightarrow 2x+3=y\Rightarrow 2x=y-3\Rightarrow x=\frac{y-3}{2}$.
Deci $\forall\in R\exists x=\frac{y-3}{2}\in R$si astfel obtinem ca f este surjectiva.
Cum f este simultan si injectiva si surjectiva rezulta ca f este bijectiva.
2) Sa se arate ca functia $f:R\to R, f(x)=-5x+2$este inversabila si sa i se determine inversa.
Ca sa aratam ca o functie este inversabila trebuie sa stim ce inseamna, astfel
Def: O functi $f:A\to B$se numeste inversabila daca exista o functie $g:B\to A$astfel incat $g\circ f=1_A$si $f\circ g=1_B$. functia g, dace exista este unica si se numeste inversa functiei f si se noteaza f^{-1}.

Functii inversabile
Teorema O functie $f:A\to B$este inversabila daca si numai daca este bijectiva.
Cu teorema care am enuntat-o mai sus daca o functie este bijectiva rezulta ca functia este inversabila, iar inversa sa este $f^{-1}=\frac{2-y}{5}$.

Aplicații

1. Se considera functia f: IR → IR, $f(x) = x^n$, $n\in\mathbb{N}^*$, cu proprietatea ca f(-2) = 256.

Sa se calculeze a=f (√2) + f $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$.

2. Fie functia putere f: IR → IR, $f(x) = x^2$. sa se rezolve ecuatiile:
   a) f(2x-1) - 3f(x) + x = -1
   b) f(x+3) - x f(√5) = 21

3. Fie functia f,g :(0,+∞) →R, $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt[8]{x}$. Sa se calculeze n = f(64+[f(21)] - [g(81)], unde [a] reprezinta partea intreaga a numarului a.
4. Sa se determine m∊IR astfel incat punctul $A(\sqrt{5}, m^2-m)$ sa apartina graficului functiei f:(0,+∞)→IR, $f(x) = \log_{1/25}x$
5. Sa se determine domeniul maxim de definitie D al functiei f:D→IR, stiind ca
   a) f(x) = lg(2x-3)
   b) $f(x) = \log_4(5-35x)$
   c) $f(x) = \log_3(-2x^2-7x+4)$
   d) $f(x) = \log_{2+x}(3-x)$
6. Sa se determine x∊IR pentru care sunt definite functiile f:D→IR, daca :
   a) f(x) = arcsin(4x-9)
   b) $f(x) = \arccos(2x^2-7)$
7. Fie functia f:IR→IR, f(x) = arccos(cosx).
   Sa se calculeze suma S = f(0)+f(π)+f(2π)+...+f(2006π)

ECUATII IRATIONALE.ECUATII EXPONENTIALE.ECUATII LOGARITMICE.ECUATII TRIGONOMETRICE

- Ecuatia in care necunoscuta este la exponent se numeste ecuatie exponentiala.
- Ecuatia : $a^{f(x)}=a^{g(x)}$, a>0, a#1.Din injectivitatea functiei exponentiale, rezulta f(x)=g(x).
- Ecuatia $a^{f(x)}=b^{g(x)}$, a,b∊(0,∞)/{1}.Prin logaritmare rezulta f(x)·lga=g(x)·lgb
- **Ecuatii logaritmice**:
  Ecuatiile logaritmice sunt ecuatii in care expresiile ce contin necunoscute apar ca baza sau ca argument al unor logaritmi.
  Tot ca si la rezolvarea ecuatiei exponentiale folosind injectivitatea functie exponetiale,avem ca rezolvarea unei ecuatii de tipul $\log_{g(x)} f(x) = b$ este echivalenta cu rezolvarea ecuatiei $f(x) = g(x)^b$, dar solutiile obtinute trebuie sa indeplineasca conditiile $f(x) > 0, g(x) > 0, g(x) \neq 1$
- **Ecuatii trigonometrice fundamentale - forma generala si multimea solutiilor:**

a) sin x =a,a∊[-1,1],x∊{$(-1)^k$arcsina+kπ/k∊Z}
b) cosx=a,a∊[-1,1],x∊{±arcosa+2kπ/k∊Z}
c) tgx=a,a∊IR,x∊{arctga + kπ/k∊Z}
d) ctgx=a,a∊IR,x∊{arcctga+kπ/k∊Z}

- **Ecuatii trigonometrice de forma**
  sin f(x)=sing(x),cos f(x)=cos g(x), tg f(x) =tgg(x).

Se pot rezolva folosind transformarea sumei de functii trigonometrice in produs si aplicand regula produsului nul.Se obtin ecuatii trigonometrice fundamentale.

Se rezolva direct folosind formule:
a) sin f(x) =sin g(x) ⇔ f(x) =$(-1)^k$ g(x0+kπ, k∊Z;
b) cos f(x) =cos g(x) ⇔ f(x) = ±g(x) +2kπ,k∊Z;
c) tg f(x) =tg g(x) ⇔ f(x)=g(x) + kπ, k∊Z;
d) ctg f(x) =ctg(g(x)) ⇔ f(x) =g(x) +kπ, k∊Z.

- **Ecuatii trigonometrice liniare sin x si cos x.**
- **Forma generala : a sin x =b cos x = c,a,b, c∊IR, a^2+b^2# 0.**

- **Metode de rezolvare :**

a) **<u>Metoda unghiului auxiliar</u>**.

Pentru a#0, $\frac{b}{a}$=tg u, u$\epsilon\left(-\frac{\pi}{2}\middle|\frac{\pi}{2}\right)$.Dupa inlocuire si transfomari se obtin ecuatii fundamentale.

b) **<u>Metoda substitutiei.</u>**

Se exprima sinx, cos x cu tg$\frac{x}{2}$=t, se obtine sin x=$\frac{2t}{1+t^2}$, cos x=$\frac{1-t^2}{1+t^2}$, iar ecuatia se transforma in ecuatie de gradul intai sau doi.

A se verifica daca numerele x=π+2kπ, kϵZ sunt solutii.

Metoda sistemelor de ecuatii. Se formeaza sistemul de ecuatii : $\begin{cases} a\sin x + b\cos x = c \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$

cu necunoscutele sinx, cos x.

Aplicații

1. Sa se rezolve ecuatiile irationale:

a)$\sqrt{-2x+1}$=5   c)$\sqrt{x+2}$=x

b) $\sqrt{2x-1}$=x   d)$\sqrt{x+1}$=5-x

2. Sa se rezolve in IR ecuatiile:

a) x= 6($\sqrt{x-2}$-1)   b) 2x +$\sqrt{16+x^2}$=11

3. Sa se rezolve in IR ecuatiile:

a) $\sqrt{x-1}$+$\sqrt{2-x}$=1   b)$\sqrt{x+8}$-$\sqrt{x}$=2   c)$\sqrt{4-x}$+$\sqrt{5+x}$=3

4. sa se rezolve ecuatiile exponentiale:

a)3^{x+1}=-3^x+8   b) 2·3^x+3^{2+x}=33   c) 2^x+2^{x+1}+2^{x-1}=56

5. sa se rezolve ecuatiile exponentiale

a) 15·2^{x+1}+15·2^{-x+2}=135   b)16^x-5·8^x+6·4^x=0

6. Sa se rezolve ecuatiile logaritmice:

a)$\log_2(x^2$-x-2)=2   b)$\log_5(x^2$+2x-3)=1   c)$\log_3(\log_4(x^2$-17))=1

7.Sa se rezolve ecuatiile logaritmice:

a)lg(x-1)+lg(6x-5)=2   b)lg(x+1)lg9=1-lgx   c)lg x +lg(9-2x)=1

8. sa se rezolve ecuatiile trigonometrice pe mutimile specificate:

a) sinx= -$\frac{1}{2}$, xϵ[0,2π]   c)tgx = -1, xϵ[0,2π]

b)cos 2x=$\frac{1}{2}$, xϵ[0,2π]   d)ctg x = $\sqrt{3}$, xϵ[0,2π]