26. Determinați rangul matricei $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & a & b & 5 \\ 2 & -2 & 1 & c & 0 \end{pmatrix}$ în funcție de $a, b, c \in \mathbb{R}$.

27. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & 2b & 2c \\ 3a & 3b & 3c \end{pmatrix}$ unde $a, b, c \in \mathbb{R}^*$.

a) Calculați rangul matricei A.

b) Arătați că există matricele $K \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ și $L \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ astfel încât $A = K \cdot L$.

c) Arătați că există $d \in \mathbb{R}$ astfel încât $A^2 = dA$.

Bacalaureat, 2009

28. Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Calculați A^3.

b) Aflați rangul matricei $I_3 + A + A^t$.

c) Determinați inversa matricei $I_3 + A$.

Bacalaureat, 2008

29. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

a) Determinați rangul matricei A^*.

b) Arătați că ecuația $AX = B$ are o infinitate de soluții $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$.

Adaptare *bacalaureat*, 2008

30. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, cu $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Calculați $\det(A)$.

b) Arătați că $\operatorname{rang}(A) \geq 2, \forall a, b \in \mathbb{R}$.

Adaptare *bacalaureat*, 2008

31. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculați $AB + BA$.

b) Arătați că $\operatorname{rang}(A+B) = \operatorname{rang}(A) + \operatorname{rang}(B)$.

c) Arătați că $(A+B)^n = A^n + B^n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

32. Arătați că sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 5x - y = 6 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}$ este incompatibil.

33. Fie sistemul de ecuaţii liniare $\begin{cases} x + 2y+z=1 \\ ax + 3y+2z=0 \\ (a+1)x+y+z=0 \end{cases}$, $a \in \mathbb{R}$. Arătaţi că pentru orice valoare a lui a sistemul are soluţie unică.

34. Determinaţi toate valorile reale ale lui m pentru care sistemul $\begin{cases} mx+y+mz=1 \\ x+y+mz=3 \\ 3x-y-2z=12 \end{cases}$ este incompatibil.

35. Arătaţi că pentru orice valoare reală a lui m sistemul de ecuaţii liniare $\begin{cases} 3x-4y+z=1 \\ -x+y+2z=m \\ x+4y+m^2z=-3 \end{cases}$ are soluţie unică.

36. Determinaţi $a,b \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul $\begin{cases} x+y+z=b+1 \\ 2x+y+z=b \\ x+ay-z=-1 \end{cases}$ are cel puţin două soluţii.

37. Arătaţi că sistemul de ecuaţii liniare $\begin{cases} 2x-y+3z=1 \\ x+y+z=2 \\ x-2y+2z=-1 \end{cases}$ are o infinitate de soluţii.

38. Aflaţi valorile reale ale lui a pentru care sistemul de ecuaţii liniare $\begin{cases} 2ax+y+z=0 \\ x+2ay+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$ este compatibil nedeterminat.

39. Fie sistemul $\begin{cases} x+2y-3z=3 \\ 2x-y+z=m \\ nx+y-2z=4 \end{cases}$, unde $m, n \in \mathbb{R}$.

a) Determinaţi m şi n pentru care sistemul admite soluţie $x_0=2, y_0=2, z_0=1$.
b) Determinaţi $n \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul are soluţie unică.
c) Determinaţi m şi n pentru care sistemul este compatibil nedeterminat.

Bacalaureat, 2009

40. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+my+2z=1 \\ x+(2m-1)y+3z=1 \\ x+my+(m-3)z=2m-1 \end{cases}$, $m \in \mathbb{R}$.

a) Determinaţi $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul are soluţie unică.
b) Determinaţi $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul este compatibil nedeterminat.

Adaptare *bacalaureat*, 2009