c) Arătați că $f_A(X \cdot Y) = f_A(X) \cdot f_A(Y)$, oricare ar fi $X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Se consideră mulțimea $G = \{A(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$, unde $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2x & 5x^2 - 2x \\ 0 & 1 & 5x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Arătați că $A(x) \cdot A(y) = A(x + y)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Arătați că $(G, \cdot)$ este grup abelian.

c) Demonstrați că $(G, \cdot) \simeq (\mathbb{R}, +)$.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{3x + 2}{x^2 - 3x + 2}$.

a) Determinați numerele reale A și B, pentru care $f(x) = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x-2}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$.

b) Calculați $f'(x)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$.

c)* Aflați derivata de ordin n a funcției f($n \in \mathbb{N}^*$).

2. Considerăm funcția $f: [0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x \ln x & x > 0 \end{cases}$.

a) Calculați $\int f(x)dx$, $x \in (0, \infty)$.

b) Arătați că f admite primitive pe $[0, \infty)$.

c) Calculați $\int_1^e f(x)dx$.

Testul 48

Subiectul I

1. Aflați modulul numărului complex $z = 1 - i$.

2. Dacă $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$, calculați $(f \circ f)(0)$.

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\sin x - \cos x = 0$.

4. Determinați al cincilea termen al dezvoltării binomiale $(1 - x)^{10}$.

5. Dacă $A(2, 0)$, $B(0, 3)$ și dreapta d are ecuația $x - y + 1 = 0$, aflați coordonatele punctului $C \in$ pentru care $CA = CB$.

6. Aflați valoarea maximă a expresiei $E = \sin x \cos x$, unde $x \in \mathbb{R}$.

Subiectul al II-lea

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -9 & -5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\det(A - xI_2) = 0$.

b) Calculați B^n ($n \in \mathbb{N}^*$), știind că $B = A - I_2$.

c)* Determinați A^n ($n \in \mathbb{N}^*$).

2. Pe mulțimea $G = (2, \infty)$ se consideră legea „$*$”, definită prin egalitatea $x * y = xy - 2x - 2y + 6$, oricare ar fi $x, y \in G$.

a) Arătați că $x * y = (x-2)(y-2) + 2$, oricare ar fi $x, y \in G$.

b) Demonstrați că $(G, *)$ este un grup abelian.

c) Arătați că funcția $f: G \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x-2)$, este un izomorfism între grupurile $(G, *)$ și $(\mathbb{R}, +)$.

Subiectul al III-lea

1. Considerăm funcțiile $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_0(x) = e^{\frac{x}{2}}$ și $f_n(x) = f'_{n-1}(x)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculați $f_1(x)$.

b) Arătați că $f_n(x) = \frac{1}{2^n} \cdot e^{\frac{x}{2}}$.

c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} (f_1(0) + f_2(0) + \ldots + f_n(0))$.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n\ge1}$, $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^4+1}dx$.

a) Calculați I_3.

b) Calculați I_1.

c) Arătați că șirul $(I_n)_{n\ge1}$ este strict monoton și deduceți că $\frac{\ln 2}{4} < I_2 < \frac{\pi}{8}$.

Testul 49

Subiectul I

1. Calculați suma $S = \log_{\frac{1}{2}} 2 + \log_2 \sqrt{2}$.

2. Fie x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2 - mx - 1 = 0$, $m \in \mathbb{R}$.

Determinați m, știind că $x_1^2 + x_2^2 = x_1 + x_2 + 2$.

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $2^{x+1} + 2^{2-x} = 9$.